Anwendungen der deRham-Kohomologie

(1) Es gibt keine stetige Abbildung $g : D^n \to S^{n-1}$ mit

$$g|_{S^{n-1}} = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$$

($\hat{=}$ Brouwer-FPS

Beweis: $n \geq 2$, $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$\to$ $r \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ da $F(t,x) = (1-t)x + t \cdot r(x)$

$r \simeq$ konstante Abbildung da $F(t,x) = g(t \cdot r(x))$

$\to$ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist kontrahierbar da $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \simeq g_0$

$\to$ $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$ ↯ $g_0(x) = g(0$

(2) Sei v ein Vektorfeld auf S^n mit $v(x) \neq 0$ für alle $x \in S^n$. Dann gilt $n \equiv 1\,(2)$.

Beweis: v definiert eine Homotopie zwischen der Identität und der anti-podalen Abbildung auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

da $F(x,t) = (\cos \pi t) \cdot x + (\sin \pi t) \cdot v\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

$f(x) = -x$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{id} \simeq f$

$\to$ $\mathrm{id}^* = f^*$ auf $H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$

$\to$ $\mathrm{id} = (-1)^{n+1}\,\mathrm{Id}$

$\to$ $n \equiv 1\,(2)$

(:

Lemma 1 (Urysohn – Tietze)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $f: A \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad g|_A = f.$$

Lemma 2: Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Mengen und sei $\varphi: A \to B$ ein Homöomorphismus. Dann existiert ein Homöomorphismus $h: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ mit:

$$h(x, 0_m) = (0_n, \varphi(x)) \qquad \forall x \in A$$

Beweis: • φ werde nach Lemma 1 stetig fortgesetzt zu $f_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

• $h_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sei definiert durch

$h_1(x, y) = (x, y + f_1(x))$ $\qquad h_1^{-1}(x, y) = (x, y - f_1(x))$

• φ^{-1} werde stetig fortgesetzt zu $f_2: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

und $h_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist der Homöomorphismus:

$h_2(x, y) = (x + f_2(y), y)$

$\Rightarrow h := h_2^{-1} \circ h_1 \qquad x \in A$

$$h(x, 0_m) = h_2^{-1}(x, f_1(x)) = h_2^{-1}(x, \varphi(x))$$

$$= (x - f_2(\varphi(x)), \varphi(x)) = (0_n, \varphi(x))$$

Folgerung 1: Sei $\varphi: A \to B$ ein Homöomorphismus, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann existiert eine Fortsetzung zu einem Homöomorphismus

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

Beweis: sei $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ der Homöomorphismus $f(x, y) = (y, x)$

$\to$ man definiert:

$\tilde{\varphi}(x, y) = f \circ h \ (x, y) \qquad h$ aus Lemma 2

$x \in A: \ \tilde{\varphi}(x, 0) = (\varphi(x), 0) \qquad$ ($A \subset \mathbb{R}^{2n}$ als $(x, 0$

Bemerkung: · Durch Einschränkung definiert $\tilde{\varphi}$ einen Homöomorphismus

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{2n} \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \setminus B$$

· Es gibt Beispiele mit $A \cong B$ aber $\mathbb{R}^n \setminus A \ncong \mathbb{R}^n \setminus B$

Satz 1: Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $A \neq \mathbb{R}^n$, $B \neq \mathbb{R}^n$. Sind A und B homöomorph dann folgt.

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus B)$$

Beweis: Induktion + Satz aus der letzten Vorlesung liefern:

$$H^{p+m}(\mathbb{R}^{n+m} \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - A) \qquad p \geq 1$$

$$H^m(\mathbb{R}^{n+m} \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/_{\mathbb{R}\cdot 1}$$

m:

analog für B

$$\mathbb{R}^{2n} \setminus A \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus B \quad \Rightarrow \quad H^*(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^*(\mathbb{R}^{2n} \setminus B)$$

$$\Rightarrow H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) = H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus B)$$

für $p \geq 1$

$$H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/_{\mathbb{R}\cdot 1} \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus B)/_{\mathbb{R}\cdot 1}$$

Folgerung 2: Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $A \cong B$. Dann haben $\mathbb{R}^n \setminus A$ und $\mathbb{R}^n \setminus B$ die gleiche Anzahl von Zusammenhangskomponenten

Beweis: · $A \neq \mathbb{R}^n$, $B \neq \mathbb{R}^n$ dann folgt die Aussage aus Satz 1

· $A = \mathbb{R}^n$, $B \neq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ hat zwei Zus. komponenten

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus B$ ist zusammenhängend $\lightning$

(

Satz 2 (Jordan - Brouwer)

Sei $\Sigma_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, homöomorph zu S^{n-1}.
Dann gilt:

① $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ hat genau zwei Zus. komponenten U_1, U_2, für die U_1 beschränkt und U_2 unbeschränkt ist.

② Σ_1 ist die Menge der Punkte, die Randpunkte für U_1 und U_2 sind.

Beweis: • Σ_1 ist kompakt $\rightarrow$ $\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen

(Folgerung 2) $\rightarrow$ oBdA $\Sigma_1 = S^{n-1}$ und man hat zwei Zus. komponenten.

$$U_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}, \quad U_2 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1 \}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma_1$ hat genau zwei Zus. komponenten

• $r := \max\limits_{x \in \Sigma_1} \|x\|$ (Σ_1 ist kompakt $\rightarrow$ r ex.)

$\Rightarrow$ $U_r := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > r \}$ offen

muß in einer der beiden Komponenten enthalten sein, die andere ist dann beschränkt

da: · $U_r \subset \mathbb{R}^n \setminus \Sigma_1$ offen

· $x \notin U_r \rightarrow \|x\| \leq r$

zu ②: siehe Madsen / Tornehave

Satz 3: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\}$ mit $k \leq n$. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ zusammenhängend.

Beweis: A kompakt $\Rightarrow$ A abgeschlossen

(Folgerung 2) $\Rightarrow$ oBdA $A = D^k$

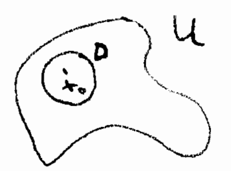
zu zeigen: $\mathbb{R}^n \setminus D^k$ ist zusammenhängend

(offensichtlich da zus. = weg zus.)

Satz 4 (Brouwer): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen und f ein Homöomorphismus auf das Bild.

Beweis: man zeigt $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen, analog folgt $f(W)$ offen für jedes $W \subset U$ offen $\rightarrow$ Behaup.

sei $D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \delta\} \subset U$



$S := \partial D$, $\mathring{D} := D \setminus S$

zu zeigen $f(\mathring{D})$ ist offen

$n = 1$: klar

$n \geq 2$: S und $\Sigma := f(S)$ sind homöomorph zu S^{n-1}

U_1, U_2 seien die Zus. komponenten von $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$: U_1 beschränkt, U_2 unbeschränkt (offen)

(Satz 3): $\mathbb{R}^n \setminus f(D)$ ist zus. + offen

$\mathbb{R}^n \setminus f(D) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$

$\rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus f(D) \subset U_2$ — da $f(D)$ kompakt $\rightarrow$ beschränkt $\rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus f(D)$ ist unbeschränkt

$\rightarrow$ $\Sigma \cup U_1 = \mathbb{R}^n \setminus U_2 \subset f(D)$

$\rightarrow$ $U_1 \subset f(\mathring{D})$, $f(\mathring{D})$ ist zus (da: $\mathring{D}$ zus.)

$\rightarrow$ $U_1 = f(\mathring{D})$ da $f(\mathring{D}) \subset U_1 \cup U_2$

Folgerung 3 (Invarianz des Gebietes)

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der induzierten Topologie homöomorph zu einer offenen Menge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist V offen.

Beweis: $\exists\, f : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ Homöomorphismus, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

(Satz 4) $\to$ $V = f(U)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

Folgerung 4 (Invarianz der Dimension) $\to$ Dimensionsbegri[ff] für topologische Mannigfaltigkei[ten]

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ nicht-leer und offen. Sind U und V homöomorph, so folgt $n = m$.

Beweis: sei $m < n$, $V \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$

(Folgerung 3) $\to$ V ist offen in $\mathbb{R}^n$ $\lightning$ (m echt kleiner als n)

Beispiel: $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ sei homöomorph zu S^1, d.h. Σ ist ein Knoten

Sei $U := \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ das Knotenkomplement

$$\to \quad H^p(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } 0 \le p \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: (Satz 1) $\to$ oBdA $\Sigma = S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (triviale Knoten)

$$\to \quad H^p(\mathbb{R}^2 \setminus S^1) = H^p(\mathring{D}^2) \oplus H^p(\mathbb{R}^2 \setminus D^2)$$

da $\mathbb{R}^2 \setminus S^1 = \mathring{D}^2 \,\dot\cup\, (\mathbb{R}^2 \setminus [D^2)$ disjunkte Vereinigu[ng]

- $\mathring{D}^2$ ist sternförmig
- $\mathbb{R}^2 \setminus D^2$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (es reicht: homotopie-äq[uivalent])

$$\to \quad H^p(\mathring{D}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad H^p(\mathbb{R}^2 \setminus D^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0,1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\to \quad H^p(\mathbb{R}^2 \setminus S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & p = 0 \\ \mathbb{R} & p = 1 \\ 0 & p \ge 2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad H^{p+1}(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = \\ 0 & p \ge \end{cases}$$

$H^0(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{R} \cong H^1(\mathbb{R}^3 \setminus$

Satz 5: Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, homöomorph zu S^{n-1} und sei U_1 die beschränkte und U_2 die unbeschränkte Zus. komponente von $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$. Dann gilt:

$$H^p(U_1) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad H^p(U_2) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0, n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: • $p = 0$ $\hat{=}$ Jordan-Brouwer-Satz

• $W := \mathbb{R}^n \setminus D^n$, $p > 0$

$$\begin{aligned} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) &\cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus \Sigma) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}) \\ &\cong H^p(\mathring{D}^n) \oplus H^p(W) \\ &\cong H^p(W) \end{aligned}$$

• $i : W \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Homotopie-Äquivalenz

$$\Rightarrow \quad H^p(W) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0, n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $H^p(U_i) = 0$ für $i = 1, 2$ und $p \notin \{0, n-1\}$

$\dim H^{n-1}(U_i) = 0$ oder 1

$\rightarrow$ es genügt zu zeigen $H^{n-1}(U_2) \neq 0$

OBdA: $0 \in U_1$, $U_1 \cup \Sigma \subset D^n$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ W \arrow[ur, "i"] \arrow[r, hookrightarrow] & U_2 \arrow[u, hookrightarrow] \end{tikzcd} \quad \longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \arrow[dl, "i^*"'] \arrow[d] \\ H^{n-1}(W) & H^{n-1}(U_2) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

kommutative Diagramme

i^* ist ein Isomorphismus $\Rightarrow$ $H^{n-1}(U_2) \neq 0$

Bemerkung: Es ex. Beispiele $n = 3$, $\pi_1 U_1 \neq 1$, d.h. U_1 ist nicht kontrahierbar