# DeRham-Kohomologie auf Mfk.

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte Mfk.

<u>lokale Parametrisierungen</u> $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$

<u>Karten</u>: $x : V \longrightarrow U = x(V) \subset \mathbb{R}^n$ , $x = \varphi^{-1}$

$V \subset M$ $\quad p \mapsto x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$

<u>Tangentialraum</u>: $T_p M = \operatorname{Im} D\varphi_u$ , $\varphi(u) = p$

<u>Definition</u>: Eine <u>Differentialform</u> vom Grad $k$ auf $M$ ist eine glatte Zuordnung

$$p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k T_p M$$

dh. $\varphi^* \omega$ ist eine glatte $k$-Form auf $U$ für jede Parametrisierung $\varphi : U \subset \mathbb{R} \to \varphi(U) \subset M$

wobei $\varphi^* \omega_x = D\varphi^* (\omega_{\varphi(x)})$

<u>Bemerkung</u>:

- Es genügt die Glattheit zu überprüfen für eine Familie von Parametrisierungen, die $M$ überdecken

- äquivalent ist: $\omega$ ist eine $C^\infty(M)$ $k$-lineare alternierende Abbildung

  $\omega : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

  wobei $\mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$ = Raum der VF auf $M$

- eine $k$-Form $\omega$ schreibt sich im Allgemeinen als.

  $$\omega = \sum_I \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

  wobei. $dx_i$ = Differential der $i$ten Koordinatenfunktion

- Man definiert $\Lambda^k TM = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k T_p M$ Bündel der $k$-Form

  $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k TM)$ Raum der $k$-Forms

**Definition:** Das äußere <u>Differential</u> $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ ist bzgl. lokaler Parametrisierungen definiert als:

$$(d\omega)_p = (D_x\varphi)^{-1}\, d_x\, (\varphi^*\omega) \qquad p = \varphi(x)$$

**Satz 1:** Auf einer glatten Mfk $M$ existiert genau eine Abbildung $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ mit

① $d$ ist $\mathbb{R}$-linear, $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

② $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ oder $df(X) = X(f)$

③ $d^2 = 0$

④ $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$

für alle $\omega_1 \in \Omega^k(M)$, $\omega_2 \in \Omega^\ell(M)$

**Bemerkung:** • In lokalen Koordinaten hat man für $\omega = \sum_I \omega_I\, dx_I$:

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_I \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Sei $f \in C^\infty(U)$, $U \subset M$ dann ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := Df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = Df\left(D\varphi(e_i)\right) = D(f\circ\varphi)(e_i)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\varphi(x + te_i) \qquad \{dx_i\} \text{ dual zu } \{\tfrac{\partial}{\partial x_i}\}$$

- Es gilt wie für $\mathbb{R}^n$: $\quad d(f^*\omega) = f^* d\omega$

- $(\Omega^*(M), d)$ ist ein Kettenkomplex

- $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$

  $(\omega_1 \wedge \omega_2)_p = (\omega_1)_p \wedge (\omega_2)_p$

**Definition:** Die $p$-te *deRham-Kohomologie* von $M$ ist die $p$-te Kohomologie von $\Omega^*$, d.h.

$$H^p_{dR}(M) = \frac{\ker(d : \Omega^p \to \Omega^{p+1})}{\operatorname{im}(d : \Omega^{p-1} \to \Omega^p)}$$

**Bemerkung:**

- Das Dachprodukt definiert eine bilineare Abbildung:

$$H^p_{dR}(M) \times H^q_{dR}(M) \longrightarrow H^{p+q}_{dR}(M)$$

wobei $H^p_{dR}(M) = 0$ für $p < 0$ und $p > \dim M$

- Das Zurückziehen definiert eine lineare Abbildung

$$f^* : H^p(N) \to H^p(M) \qquad f : M \to N$$

d.h. $M \mapsto H^p(M)$ ist ein kontravarianter Funktor

**Satz über die Existenz einer Tubenumgebung**

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine glatte Mfk. Dann existiert eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $M \subseteq V$ und

1. $\exists\, r : V \to M$ glatt mit $r|_M = \mathrm{Id}_M$
2. $\|x - r(x)\| \leq \|x - y\|$ für $x \in V$, $y \in M$

   Gleichheit genau für $y = r(x)$


3. Sei $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ glatt mit $0 < \varepsilon(p) < \rho(p)$, dann ist

$$S_\varepsilon := \{x \in V \mid \|x - r(x)\| = \varepsilon(r(x))\}$$

   eine glatte Mfk. der Kodimension 1

4. Für alle $p \in M$ ist $r^{-1}(p)$ eine Kugel in $p + T_pM^\perp$ mit Zentrum $p$ und Radius $\rho(p)$

M kompakt
$\to$ OBdA
$\rho$ konst.

**Bezeichnung:** Man nennt $V = V_\rho$ eine *Tubenumgebung* von $M$ vom Radius $\rho$.

**Satz 3:** Seien $M_1, M_2$ glatte Mfk., dann gilt:

① Sind $f_1, f_2 : M_1 \to M_2$ homotop, so folgt
$$f_1^* = f_2^* \quad \text{auf der Kohomologie}$$

② Jede stetige Abbildung $f : M_1 \to M_2$ ist homotop zu einer glatten Abbildung

**Beweis:** $(V_a, i_a, r_a)$ $a = 1,2$ seien Tubenumgebungen von $M_a$

**zu ①:** $f_1 \simeq f_2 \implies i_2 \circ f_1 \circ r_1 \simeq i_2 \circ f_2 \circ r_1$

$\implies r_1^* \circ f_1^* \circ i_2^* = r_1^* \circ f_2^* \circ i_2^*$ auf $H^*(V_2)$

$\implies f_1^* = f_2^*$ da: $i_2^*$ surjektiv und $r_1^*$ injektiv

**zu ②:** $\varphi : M_1 \to M_2$ stetig

$\implies \exists\, g$ glatt mit $g \simeq i_2 \circ \varphi \circ r_1$, $g : V_1 \to V_2$

man betrachtet: $f = r_2 \circ g \circ i_1 \simeq r_2 \circ (i_2 \circ \varphi \circ r_1) \circ i_1 = \varphi$

**Folgerung:** Sei $V$ eine Tubenumgebung von $M$, dann ist
$$i^* : H^k(V) \to H^k(M)$$
ein Isomorphismus mit Inversem $r^*$.

**Beweis:** $r \circ i = \mathrm{id}_M$, $\implies i \circ r \simeq \mathrm{Id}_V$ da: die Strecke von $x$ nach $i(r(x))$ in $V$ liegt

$\implies r^* \circ i^* = \mathrm{Id}$ und $i^* \circ r^* = \mathrm{Id}$

**Anwendungen:** Sei $V$ eine Tubenumgebung von $M$

Inklusion: $i : M \longrightarrow V$

Retrakt: $r : V \longrightarrow M$ mit $r \circ i = \mathrm{Id}_M$

$\Rightarrow$ $i^* \circ r^* = \mathrm{Id}_{H^k(M)}$

$\Rightarrow$ $i^* : H^k(V) \longrightarrow H^k(M)$ ist surjektiv

$r^* : H^k(M) \longrightarrow H^k(V)$ ist injektiv

**Satz 2:** Sei $M$ kompakt, dann ist für alle $k$ die deRham-Kohomologie $H^k(M)$ endlich-dimensional.

**Beweis:** $M$ kompakt $\Rightarrow$ es existieren offene Kugeln $U_1, \dots, U_r \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit

$$M \subset U \subset V \quad , \; U = U_1 \cup \dots \cup U_r$$

(möglich, da $M \subset V$, $V$ offen)

Sei $i$ die Inklusion $i : M \to U$ und $r|_U : U \to M$ die Einschränkung von $r$

$\Rightarrow$ $r|_U \circ i = \mathrm{Id}_M$

$\Rightarrow$ $i^* : H^k(U) \to H^k(M)$ surjektiv

$\Rightarrow$ $H^k(M) \cong H^k(U) / \ker i^*$

schon gezeigt: $H^d(U)$ ist endlich-dimensional

$\Rightarrow$ $H^k(M)$ ist endlich-dimensional

**Definition:** Die Euler-Charakteristik von $M$ ist definiert als

$M$ kompakt, $n = \dim M$

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(M)$$

$k$-te Betti-Zahl: $b_k(M) = \dim H^k(M)$

**Beispiel:** $$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis:** $i: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ Inklusion, $r: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$\leadsto r \circ i = \mathrm{Id}_{S^n}$, $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ (Homotopieäquivalenz)

$\Rightarrow H^k(S^n) \cong H^k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ $\leadsto \chi(S^{2n}) = 2$

$\chi(S^{2n+1}) = 0$

**Bemerkung:** Die Mayer-Vietoris-Sequenz überträgt sich auf Mfk.

**Satz 4:** Seien $U_1, U_2$ offene Teilmengen einer Mfk. $M$.
Dann hat man folgende lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \to H^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I_*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \to \dots$$

**Beweis:** man nutzt eine Zerlegung der Eins und überträgt den Beweis für offene Mengen in $\mathbb{R}^n$

genauer: man zeigt:

$$0 \to \Omega^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, wobei $I$ und $J$ wie zuvor definiert sind