# Orientierung und Integration

**Definition:** Eine Mfk. $M^n$ heißt orientierbar, falls eine Form $\omega \in \Omega^n(M)$ existiert mit $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$.

Man nennt $\omega$ eine Volumenform auf $M$.

**Bemerkung:**
- Standardorientierung auf $\mathbb{R}^n$: $\omega_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$
- Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ in $T_pM$ heißt positiv orientiert, falls

$$\omega_p(v_1, \ldots, v_n) > 0$$

- äquivalente Orientierungen: $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ mit $f > 0$

  Orientierung auf $M$ = Äquivalenzklasse von Orientierungen

**Definition:** Sei $\varphi : (M_1, \omega_1) \longrightarrow (M_2, \omega_2)$ ein Diffeomorphismus zwischen orientierten Mfk. Man nennt $\varphi$ orientierungserhaltend falls

$$\varphi^* \omega_2 = f \cdot \omega_1 \quad \text{mit} \quad f > 0$$

und orientierungsumkehrend für $f < 0$.

**Beispiel:** $\varphi : U_1 \subset \mathbb{R}^n \to U_2 \subset \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismus

$\Rightarrow$ $\varphi$ ist orientierungserhaltend $\Leftrightarrow$ $\det(D_x \varphi) > 0$

**Bemerkung:** Positive Karten: $x : U \subset M \to U' \subset \mathbb{R}^n$

mit $x^* \omega_0 = f\, \omega|_U$, $f > 0$

d.h. Übergangsfkt sind orientierungserhaltend, also haben die Jacobi-Matrizen eine positive Determinante

man erhält den vorher definierten Orientierungsbegriff

<u>Definition</u>: Eine <u>Riemannsche Metrik</u> auf $M$ ist eine glatte Familie von Skalarprodukten $g_p$ auf $T_pM$

d.h. für jede Parametrisierung $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ und beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist

$$x \mapsto g_{\varphi(x)}\left(D\varphi(v_1), D\varphi(v_2)\right)$$

eine glatte Funktion auf $U$

<u>Bemerkung</u>: Auf jeder Mfk. existiert eine Riemannsche Metrik

<u>Satz</u>: Sei $M$ eine orientierte Riemannsche Mfk. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Volumenform mit

$$vol_M(v_1, \dots, v_n) = 1$$

für jede positive Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von $T_pM$

<u>lokale Form</u>: Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ eine lokale Parametrisierung

$$g_{ij}(x) = g_{\varphi(x)}\left(D\varphi(e_i), D\varphi(e_j)\right)$$
$$= g_{\varphi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \qquad \{e_i\} \text{ kanonische Basis}$$

$$\Rightarrow \varphi^* vol_M = \sqrt{\det g_{ij}}\; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

<u>Bemerkung</u>: $vol_M$ ist eine parallele Form (bzgl. Levi-Civita-Zus.)

**Beispiel:** Volumenform auf der Sphäre

- Man definiert $\omega_0 \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ durch:

$$(\omega_0)_x(v_1,\dots,v_{n-1}) = \det(x, v_1,\dots,v_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weglassen}}}{\widehat{dx_i}} \wedge \dots \wedge dx_n$$

da: $(\omega_0)_x(e_1, \dots \hat{e}_i \dots e_n) = (-1)^{i-1} x_i \qquad x = (x_1,\dots,x_n)$

- $x \in S^n$, $v_1,\dots,v_{n-1}$ Basis von $T_x S^{n-1} = x^{\perp}$

$\Rightarrow$ $x, v_1, \dots, v_{n-1}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $(\omega_0)_x \neq 0$

$\Rightarrow$ $\omega_0|_{S^{n-1}} = i^* \omega_0$ definiert eine Orientierung auf $S^{n-1}$

- $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine induzierte Riemannsche Metrik

$\Rightarrow$ $vol_{S^{n-1}} = \omega_0|_{S^{n-1}}$

- Sei $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ die antipodale Abbildung: $f(x) = -x$

$\Rightarrow$ $f^* vol_{S^{n-1}} = (-1)^n vol_{S^{n-1}}$

da $f$ betrachtet als Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt

$$\begin{aligned} f^*\omega_0 &= \sum (-1)^{i-1} x_i \circ f \quad f^*(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \sum (-1)^{i-1} (-x_i) \cdot (-1)^{n-1} dx_1 \wedge \dots \qquad \wedge dx_n \\ &= (-1)^n \omega_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^* dx_i &= \sum a_j \, dx_j \\ &= \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= - dx_i \end{aligned} \qquad , \qquad \begin{aligned} a_j &= f^* dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= dx_i \left(Df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) \\ &= dx_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

<u>Bezeichnung:</u> $\Omega^k_c(M)$ = Raum der $k$-Formen mit kompakten Träger

<u>Satz:</u> Sei $M^n$ eine $n$-dimensionale glatte Mfk. mit Orientierung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\int_M : \Omega^n_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit: für $\omega \in \Omega^n_c(M)$ mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset U$ für eine Karte $(x, U)$ gilt:

$$\int_M \omega = \int_{x(U)} (x^{-1})^* \omega$$

<u>Beweis:</u> Zerlegung der Eins

<u>Eigenschaften:</u> ① $\int_M \omega$ wechselt das Vorzeichen, wenn man die Orientierung umkehrt

② $\omega \in \Omega^n_c(M)$, $\operatorname{supp}(\omega) \subset U \subset M$:

$$\int_M \omega = \int_U \omega$$

③ Sei $\varphi : N \to M$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, dann gilt

$$\int_M \omega = \int_N \varphi^* \omega$$

<u>Beweis von ③:</u> OBdA $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$

$\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ or. erhaltend

$$\Rightarrow \varphi^* \omega = f(\varphi(x)) \det D_x\varphi \quad dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$
$$= f(\varphi(x)) \,|\det D_x \varphi|\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi(U)} f(x)\, dx = \int_U f(\varphi(x)) \,|\det D_x\varphi|\, dx \qquad \text{(Transformationsregel}$$

$$= \int_U \varphi^* \omega$$

**Folgerung aus dem Satz von Stokes:**

Sei $M^n$ eine orientierte glatte Mfk., $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$.
Dann gilt:

$$\int_M d\omega = 0$$

**Bemerkung:** • Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, $d\omega = 0$

$$[\omega] \neq 0 \text{ in } H^k(M) \Leftrightarrow \int_Q f^*\omega \neq 0 \qquad (*)$$

für eine geeignet gewählte glatte Abbildung $f: Q \to M$, $Q$ kompakte, or., $k$-dim. Mfk'.

da: Annahme $\omega = d\tau$ für ein $\tau \in \Omega^{k-1}(M)$

$$\Rightarrow \int_Q f^*\omega = \int_Q f^* d\tau = \int_Q d f^*\tau = 0$$

• Man kann zeigen: $[\omega] = 0 \Leftrightarrow$ alle Integrale der Form $(*)$ verschwinden

**Satz:** Sei $M^n$ eine zusammenhängende, orientierte Mfk.
Dann ist folgende Sequenz exakt.

$$\Omega^{n-1}_c(M) \xrightarrow{d} \Omega^n_c(M) \xrightarrow{\int} \mathbb{R} \to 0$$

**Folgerung:** Sei $M^n$ zus., kompakt und orientiert. Dann induziert die Integration einen Isomorphismus

$$\int_M : H^n(M) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$$

**Beweis:**
$$\mathbb{R} \cong \Omega^n(M) / \ker \int$$
$$\cong \Omega^n(M) / \operatorname{im} d$$
$$\cong H^n(M) \qquad \Omega^n(M) = \ker d$$

<u>zum Beweis des Satzes</u>

- $\int_M : \Omega_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist surjektiv, da ungleich Null

- $\mathrm{Im}(d) \subset \ker(\int_M)$ nach Satz von Stokes

- zu zeigen: $\ker(\int_M) \subset \mathrm{Im}(d)$ (*)

- zuerst zeigt man (*) für $\mathbb{R}^n$:

$\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \omega = 0$

$\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$\Rightarrow$ gesucht ist $\kappa \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $d\kappa = \omega$

Ansatz: $\kappa = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$

$$\Rightarrow \quad d\kappa = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

d.h. gesucht sind unktionen $f_1, \ldots, f_n$ mit

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = f \qquad \text{falls } \int f\, d\mu_n = 0$$

## Der Abbildungsgrad

Seien $M, N$ $n$-dimensionale, kompakte, zus., orientierte Mfk.

**Definition:** Sei $f: M^n \to N^n$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Abbildungsgrad von $f$ definiert durch

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega \qquad \text{für } \omega \in \Omega^n(N)$$

dh. man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^n(N) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"'] & H^n(M) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\deg(f)\cdot"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Sei $M = M_1 \,\dot\cup \dots \dot\cup\, M_n$ eine Zerlegung in Zusammenhangskomponenten, falls $M$ nicht zus. ist. In diesem Fall definiert man:

$$\deg(f) = \sum \deg(f_j) \qquad \text{für } f_j := f|_{M_j}$$

**Lemma:** Der Abbildungsgrad $\deg(f)$ hängt nur von der Homotopieklasse von $f$ ab.

Beweis: klar, da dies für $f^*: H^*(N) \to H^*(M)$ gilt

**Lemma:** $\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$

Beweis.
$$\deg(g\circ f) \int_Z \omega = \int_X (g\circ f)^* \omega = \int_X f^* g^* \omega$$
$$= \deg(f) \int_Y g^* \omega = \deg(f)\deg(g) \int_Z \omega$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$