Seien M, N kompakt, n-dimensional, or., M zus.

$f: N \longrightarrow M$, $p \in M$ regulärer Wert, $q \in f^{-1}(p)$

$$\operatorname{sign} D_q f := \begin{cases} 1 & D_q f : T_q N \to T_p M \text{ ist or. erhaltend} \\ -1 & \text{" — " ist or. umkehrend} \end{cases}$$

<u>Satz</u>: $\deg(f) = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign} D_q f$

d.h. die gegebenen Definitionen für $\deg(f)$ stimmen überein

<u>Beweis</u>: $p \in M$ regulärer Wert, $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_k\}$ (endlich, kompakt)

$\Rightarrow$ es ex. disjunkte offene Umgebungen V_i von q_i, $V_i \subset N$ und eine offene Umgebung U von p mit:

(i) $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ $\qquad U, V_i$ zus. !

(ii) $f_i|_{V_i} : V_i \to U$ ist ein Diffeomorphismus

V_i, U zus., f_i Diffeom. $\Rightarrow$ $f_i|_{V_i}$ ist or. erhaltend oder or. umkehrend auf ganz V_i, je nachdem, ob $\operatorname{sign} D_{q_i} f = 1$ od

Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset U$, $\int_M \omega = 1$

$\Rightarrow \operatorname{supp}(f^*\omega) \subset f^{-1}(U) = V_1 \dot\cup \dots \dot\cup V_k$

$f^*\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i \qquad \omega_i \in \Omega^n(V_i) \subset \Omega^n(N)$, $\operatorname{supp}(\omega_i) \subset V_i$

$$\Rightarrow \deg(f) = \deg(f) \int_M \omega = \int_N f^*\omega = \int_N \sum \omega_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} (f|_{V_i})^* (\omega|_U)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} D_{q_i} f \cdot \int_U \omega|_U$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} D_{q_i} f$$

Satz: Sei $F: P^{n+1} \longrightarrow M^n$ glatt, P, M or. glatte Mft., M kompakt, zus.. Sei $X \subset P$ kompaktes Gebiet mit glattem Rand: $N^n = \partial X$, $N = N_1 \cup \dots \cup N_k$ disjunkte Vereinigung von Untermft., Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \deg(F|_{N_i}) = 0$$

Beweis: Sei $f = F|_N \quad \Rightarrow \deg f = \sum_{i=1}^{k} \deg(F|_{N_i})$ (nach Definitio

$$\Rightarrow \deg(f) = \int_N f^* \omega \qquad \text{für } \omega \in \Omega^n(M), \int_M \omega = 1$$

$f: N \to M$

$$= \int_X d\, F^* \omega \qquad \text{(Satz von Stokes)}$$

$$= \int_X F^* d\omega$$

$$= 0 \qquad \underline{\text{da}}\ d\omega = 0$$

Bemerkung: Der Satz ist eine Verallgemeinerung der früher bewiesenen Aussage, dass $\deg(f) = 0$, falls $f: \partial W \to M$ sich zu einer Abbildung $F: W \to M$ fortsetzt.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ Vektorfeld auf U

$0 \in U$ sei eine isolierte Nullstelle von F = Singularität

$D^n_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon \} \subset U$

0 sei einzige Nullstelle von F auf D^n_ε

man definiert $F_\varepsilon : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$, $F_\varepsilon(x) = \dfrac{F(\varepsilon \cdot x)}{\| F(\varepsilon \cdot x) \|}$ glatt

<u>lokaler Index</u> von F in 0: $\operatorname{ind}_0(F) := \deg(F_\varepsilon)$

<u>Bemerkungen</u>:

- $\deg(F_\varepsilon) = \deg\left(p \in \partial D^n_\varepsilon \longmapsto \frac{F(p)}{\|F(p)\|} \in S^{n-1} \right)$ ⇐ alte Def. des Index

  <u>da</u> $\partial D^n_\varepsilon \cong S^{n-1}$ orientierungserhaltend diffeomorph

- Die Homotopieklasse von F_ε ist unabhängig von der Wahl von ε, d.h. $\operatorname{ind}_0(F) \in \mathbb{Z}$ ist unabhängig von ε

<u>Lemma</u>: Sei $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit einer einzigen Nullstelle in 0. Dann induziert die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

die Multiplikation mit $\operatorname{ind}_0(F)$ auf $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>: $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Inklusion, $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $x \mapsto x/\|x\|$ Retraktion

Sei $F_1 := r \circ F \circ i \Rightarrow \operatorname{ind}_0(F) = \deg(F_1)$

Die Aussage des Lemmas folgt aus dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[r, "F^*"] & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[d, "i^* = (r^*)^{-1}"] \\
H^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[u, "r^*"] \arrow[r, "F_1^*"'] & H^{n-1}(S^{n-1})
\end{tikzcd}$$

Übertragung auf Mannigfaltigkeiten

Sei X ein Vektorfeld auf M, $p \mapsto X_p \in T_pM$ glatt in p
mit $p_0 \in M$ als isolierte Nullstelle
sei $h: U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte um p_0 mit $h(p_0)=0$

<u>man definiert:</u> $\operatorname{ind}_{p_0}(X) = \operatorname{ind}_0(h_* X|_U)$

wobei: $(h_* X)_q = (D_p h)\, X(p)$, $p = h^{-1}(q)$

(entspricht der schon gegebenen Definition

<u>zur Erinnerung:</u>

- p_0 heißt <u>nicht entartete Singularität</u> (oder Nullstelle), falls
  $F = h_* X|_U$ ein lokaler Diffeomorphismus um $0 = h(p_0)$ ist

  d.h. falls $\det(D_0 F) \neq 0$

  $\Rightarrow \operatorname{ind}_{p_0}(X) = \operatorname{sign}(\det D_0 F) \in \{\pm 1\}$

- Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mfk. M, das nur isolierte Nullstellen hat. Der <u>totale Index</u> von X ist definiert als

$$I(X) = \sum_{\substack{p \\ X(p)=0}} \operatorname{ind}_p(X)$$

<u>schon gezeigt:</u> ① $I(X)$ hängt nicht von X ab
(da Abbildungsgrad der Gauß-Abbildung)

② X kann o.B.d.A. als ein VF vorausgesetzt werden, das nur nicht-entartete Nullstellen hat

Ziel: Beweis des Satzes von Poincaré - Hopf

Satz: Sei X ein glattes VF auf einer kompakten Mfk. M, das nur isolierte Nullstellen hat. Dann gilt:

$$I(X) = \chi(M) \qquad \left(\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M)\right)$$

Plan: Man berechnet $I(X)$ für $X = \operatorname{grad}(f)$, wobei f eine geeignet definierte Morsefunktion ist.

Definition: Sei $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$ heißt kritischer Punkt von f falls $d_p f = 0$, d.h. falls $\operatorname{grad}_p(f) = 0$

Bemerkung: Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, dann gilt:

$$df(X) = X(f) = g(X, \operatorname{grad}(f)) = \frac{d}{dt} f(c(t)), \; X = \dot{c}$$

Satz: Sei $p \in M$ ein kritischer Punkt für $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

① Es existiert eine quadratische Form $\operatorname{Hess}_p(f)$ auf $T_p M$, gegeben durch

Polarisation ⇓ symm. BF

$$\operatorname{Hess}_p(f)(\dot{c}(0)) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} f(c(t))$$

wobei $c: (-\delta, \delta) \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = p$ ist

② Sei $h: U \subset M \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um p, $h(p) = q$, dann ist

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{D_q h^{-1}} T_p M \xrightarrow{\operatorname{Hess}_p(f)} \mathbb{R}$$

die quadratische Form zur symmetrischen Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f \circ h^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(q) \right) \qquad (*)$$

Man sagt: die Hessische von f

Beweis: Sei $h(c(t)) = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$\varphi = f \circ h^{-1} \in C^\infty(V)$ $\qquad h : U \subset M \to h(U) = V \subset \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \; f(c(t))' = \varphi(\gamma(t))' = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) = \langle \operatorname{grad} \varphi, \dot{\gamma} \rangle_t$$

p kritisch $\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\gamma(0)) = 0$ $\qquad h(p) = q = \gamma(0)$

$$\to \; \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} f \circ c(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(q) \, \gamma_i'(0) \cdot \gamma_j'(0)$$

das ist der Wert der angegebenen quadratischen Form in $\gamma'(0) = D_p h(c'(0))$

Definition: Ein kritischer Punkt $p \in M$ von $f \in C^\infty(M)$ heißt <u>nicht entartet</u>, falls die Matrix (*) invertierbar ist.

Eine Funktion f, deren kritische Punkte alle nicht entartet sind heißt <u>Morse - Funktion</u>

Der <u>Index</u> eines nicht entarteten kritischen Punktes p ist der Index von $\mathrm{Hess}_p(f)$, d.h. die maximale Definition des Unterraumes, auf dem $\mathrm{Hess}_p(f)$ negativ definit ist.

Bemerkung:
- nicht entartete kritische Punkte von f = nicht entartete Singularität von $\operatorname{grad}(f)$
- Die Eigenschaft "nicht-entartet" und der Index hängen nicht von der gewählten Karte ab

da: $\tilde{h} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ sei zweite Karte um p, $\tilde{q} = \tilde{h}(p)$

Kartenwechsel: $F = \tilde{h} \circ h^{-1}$, $J = D_q F$ Jacobi-Matrix

$$\to \; \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(q) \right) = J^T \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y_i \partial y_j}(\tilde{q}) \right) J$$

$\tilde{\varphi} = f \circ \tilde{h}^{-1}$

Existenz von Morse-Funktionen

Satz: Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine glatte Mfk. Für fast alle $p_0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ ist die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(p) = \frac{1}{2} \| p - p_0 \|^2$$

eine Morse-Funktion.

Beweis: sei $g : \mathbb{R}^n \to M$ eine lokale Parametrisierung

$Y_1, \dots, Y_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ glatt mit $T_{g(x)} M^\perp = \operatorname{span}\{Y_1(x), \dots, Y_k(x)\}$

M sei überdeckt durch abzählbare Kartengebiete $g(U)$ mit solchen Y_i

man definiert: $\phi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$

(1) $$\phi(x,t) = g(x) + \sum_{j=1}^{k} t_j Y_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}^k$$

(Sard) $\Rightarrow$ es genügt zu zeigen: f ist Morse-Funktion auf $g(U)$, falls p_0 regulärer Wert von ϕ

sei $k = f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(2) $$k(x) = \frac{1}{2} \| g(x) - p_0 \|^2$$ es genügt zu zeigen: k ist Morse-Fkt.

(3) • $\left\langle \frac{\partial g}{\partial x_i}(x), Y_r(x) \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}, Y_r \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial Y_r}{\partial x_j} \right\rangle$

(4) • (2) $\Rightarrow$ $$\frac{\partial k}{\partial x_i} = \left\langle g(x) - p_0, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle$$

(5) $$\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle g(x) - p_0, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle$$

(6) • (1) $\Rightarrow$ $$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum t_r \frac{\partial Y_r}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t_r} = Y_r$$

• Sei p_0 regulärer Wert von ϕ, x kritischer Punkt von k

(4) $\to$ $g(x) - p_0 \in T_{g(x)} M^\perp$

$\to \exists\, t \in \mathbb{R}^k :$ $g(x) - p_0 = - \sum_{r=1}^{k} t_r Y_r(x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \sum t_r Y_r, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \sum t_r \frac{\partial Y_r}{\partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle$$

p_0 regulär

- A sei die Jacobi-Matrix von ϕ:
  - A ist invertierbar
  - Zeilen ! von A geg. in (6)

$\Rightarrow A \cdot D_x g$ nimmt folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 k}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 k}{\partial x_n \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 k}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 k}{\partial x_n \partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rang}(D_x g) = n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ hat Rang n in x

$\Rightarrow \quad x$ ist nicht entarteter kritischer Punkt