Beispiel: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = c - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

$c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \lambda \leq n$

$\Rightarrow$ 0 ist einziger kritischer Punkt, da: $\operatorname{grad}(f) = 2(-x_1, \dots -x_\lambda, x_{\lambda+1} \dots$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right) = \operatorname{diag}(\underbrace{-2, \dots -2}_{\lambda\text{-mal}}, 2, \dots 2)$$

$\Rightarrow$ 0 ist nicht-entartet vom Index λ

grad (f) hat 0 als einzige NS, nicht-entartet, Index (-1)

Morse-Lemma. Sei $p \in M^n$ ein nicht-entarteter kritischer Punkt von $f \in C^\infty(M)$, vom Index λ. Dann existiert eine Karte $h : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$, $h(p) = 0$ und

$$(*) \qquad f \circ h^{-1}(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

Beweis: siehe Madsen, Tornehave oder Milnor: Morse Theory

Bemerkungen:

- p ist der einzige kritische Punkt in U, d.h. nicht-entartete kritische Punkte liegen isoliert
- M kompakt, f Morse-Funktion

  $\rightarrow$ f hat endlich viele kritische Punkte, darunter immer:

  lokales Maximum: Index $\lambda = n$

  lokales Minimum: Index $\lambda = 0$

Bezeichnung: Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Morse-Funktion. Ein Vektorfeld X auf M heißt <u>gradientenartig</u> für f, falls

① $df_p(X(p)) > 0$ für alle $p \in M$, die nicht kritisch sind

② Sei p ein kritischer Punkt von f, dann existiert eine Karte $h: U \subset M \to \mathbb{R}^n$ mit $h(p) = 0$, $f \circ h^{-1}$ in Standardform $(*)$ und

$$h_* X = \operatorname{grad}(f \circ h^{-1}) \qquad \text{auf } h(U)$$

Lemma 1: Jede Morse-Funktion auf M besitzt ein gradientenartiges Vektorfeld.

Beweis: Sei (U_α, h_α) eine Überdeckung von durch Karten mit:

(i) jeder kritische Punkt liegt in genau einer Karte U_α

(ii) $\forall \alpha$: f hat entweder keinen kritischen Punkt in U_α oder genau einen: p mit $h_\alpha(p)=0$ und $f h_\alpha^{-1}$ wie in $(*)$

man definiert: $X_\alpha = (h_\alpha^{-1})_* \operatorname{grad}(f \circ h_\alpha^{-1})$ auf U_α

Sei $\{\rho_\alpha\}$ eine Zerlegung der Eins bzgl. $\{U_\alpha\}$

man definiert: $X = \sum \rho_\alpha X_\alpha$

zu ①: p sei kein kritischer Punkt, $q = h_\alpha(p)$

$$\rightarrow df_p(X_\alpha(p)) = d(f \circ h_\alpha^{-1})_q \operatorname{grad}_q(f \circ h_\alpha^{-1})$$
$$= \|\operatorname{grad}_q(f \circ h_\alpha^{-1})\|^2 > 0$$

$$\rightarrow df_p(X(p)) = \sum \rho_\alpha(p)\, df_p(X_\alpha(p)) > 0$$

zu ②: erfüllt nach Definition von X

Lemma 2: Sei f eine Morse-Funktion auf M und sei X ein VF mit $df_p(X(p)) > 0$ für jeden nicht kritischen Punkt p. Sei p_0 ein kritischer Punkt vom Index λ mit $X(p_0) = 0$. Dann gilt

$$\operatorname{ind}_{p_0}(X) = (-1)^\lambda$$

Beweis:
- Sei $\tilde{X}$ gradientenartig für f

Definition + Beispiel $(*)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{ind}_{p_0}(\tilde{X}) = (-1)^\lambda$

- sei U eine offene Umgebung von p_0, diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{df_p(\tilde{X}(p))}_{= \langle v, \tilde{X}(p)\rangle} > 0, \quad \underbrace{df_p(X(p))}_{= \langle v, X(p)\rangle} > 0 \qquad p \in U \setminus \{p_0\}$$

$v = \operatorname{grad}(f)_p$

$\Rightarrow$ $\tilde{X}(p), X(p)$ liegen in demselben Halbraum von $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $X, \tilde{X}$ sind zueinander homotop (auf $U \setminus \{p_0\}$) entlang: $(1-t)X(p) + t\tilde{X}(p)$

$\Rightarrow$ $\operatorname{ind}_{p_0}(X) = \operatorname{ind}_p(\tilde{X})$

Satz: Sei M kompakt und X ein VF mit isolierten Nullstellen. Sei $f \in C^\infty(M)$ eine Morse-Funktion und sei c_λ die Anzahl der kritischen Punkte vom Index λ für f. Dann gilt:

$$I(X) = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda c_\lambda$$

Beweis: oBdA X gradientenartig für f

Bemerkung: Man sieht $\sum (-1)^\lambda c_\lambda$ ist unabhängig von der Morse-Funktion f.

Für den Beweis von Poincaré-Hopf ist zu zeigen, dass diese Summe die Euler-Charakteristik ergibt.

Sei M kompakt, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Morse-Funktion

man definiert: $\underline{\underline{M(a)}} := \{ p \in M \mid f(p) < a \}$

<u>Lemma 3:</u> Sei $[a_1, a_2]$ ein Intervall, das keine kritische Punkte von f enthält. Dann ist $M(a_1)$ diffeomorph zu $M(a_2)$

<u>Lemma 4:</u> Sei a ein kritischer Wert und $p_1, \dots, p_r$ die kritischen Punkte in $f^{-1}(a)$, p_i vom Index λ_i. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und disjunkte offene Umgebungen U_i von p_i mit:

① $p_1, \dots, p_r$ sind die einzigen kritischen Punkte in $f^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$

② U_i ist diffeomorph zu einer offenen kontrahierbaren Menge in $\mathbb{R}^n$

③ $U_i \cap M(a-\varepsilon) \cong S^{\lambda_i - 1} \times V_i$ diffeomorph

mit $V_i \subset \mathbb{R}^{n-\lambda_i+1}$ offen + kontrahierbar

④ $M(a+\varepsilon) \cong M(a-\varepsilon) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$ diffeomorph

<u>Beweis:</u> siehe Milnor: Morse Theory oder Madsen, Tornehave

<u>Satz:</u> Hat $M(a-\varepsilon)$ endlich-dim. Kohomologie, so auch $M(a+\varepsilon)$ und es gilt:

$$\chi(M(a+\varepsilon)) = \chi(M(a-\varepsilon)) + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\lambda_i}$$

<u>Beweis:</u> • $U = U_1 \cup \dots \cup U_r$, U_i kontrahierbar, disjunkt

$$\Rightarrow H^p(U) = \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ \mathbb{R}^r & p = 0 \end{cases} \quad \text{dh} \quad \chi(U) = r$$

• $U_i \cap M(a-\varepsilon) \simeq S^{\lambda_i - 1}$

$$\Rightarrow H^p(U_i \cap M(a-\varepsilon)) = \begin{cases} 1 & p = 0,\ p = \lambda_i - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \rightarrow \chi(\dots) = 1 + (-1)^{\lambda_i - 1}$$

• $U \cap M(a-\varepsilon) = (U_1 \cap M(a-\varepsilon)) \dot\cup \dots \dot\cup (U_r \cap M(a-\varepsilon))$

$$\Rightarrow \chi(U \cap M(a-\varepsilon)) = \sum_{i=1}^{r} 1 + (-1)^{\lambda_i - 1} = r - \sum_i (-1)^{\lambda_i} = \chi(U) - \sum_i (-1)$$

Lemma 5: Seien $U, V \subset M$ offene Mengen, $U, V, U \cap V$ mit endlich-dimensionaler de Rham Kohomologie. Dann gilt:

$$\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$$

Beweis: Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\Rightarrow \chi(M(a+\varepsilon)) = \chi(M(a-\varepsilon)) + \chi(U) - \chi(M(a-\varepsilon) \cap U)$$
$$= \chi(M(a-\varepsilon)) + r - r + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\lambda_i}$$
$$= \chi(M(a-\varepsilon)) + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\lambda_i}$$

Satz: Sei M kompakt, f eine Morse-Funktion auf M. Dann gilt:

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{\lambda} c_{\lambda}$$

zum Beweis: $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ seien die kritischen Werte von f

man wählt b_i mit:
- $b_0 < a_1$, $b_k > a_k$
- $b_j \in (a_j, a_{j+1})$

(Lemma 3): $\dim H^d(M(b_j))$ ist unabhängig von der Wahl von

$$\chi(M(b_j)) - \chi(M(b_{j-1})) = \sum_{\substack{p \in f^{-1}(a_j) \\ p \text{ krit. Punkt} \\ \text{vom Index } \lambda(p)}} (-1)^{\lambda(p)}$$

man startet mit b_0 mit $M(b_0) = \emptyset$

$$\rightarrow \chi(M) = \chi(M(b_k)) = \sum_{p} (-1)^{\lambda(p)}$$

Satz von Gauß-Bonnet: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, or. Fläche mit Gauß-Krümmung K. Dann gilt:

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S K \, vol_S$$

Beweis: · Gauß-Abbildung $N: S \to S^2$ (definiert Orientierung)

$K(p) = \det(d_p N)$ $\qquad T_p S = p^\perp = T_p S^2$

(Sard): oBdA $p_\pm = (0, 0, \pm 1)$ reguläre Werte von N

· $f: S \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$

p kritischer Punkt $\Leftrightarrow$ $N(p) = p_\pm$ $\qquad$ dh $T_p S$ parallel zur x,y-Ebene

$\to$ hier $d.N_p$ ist ein Isomorphismus und $K(p) \neq 0$

Parametrisierung: $(u, v, f(u,v))$

$$K = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

$\to$ p ist nicht-entarteter kritischer Punkt von f $\qquad$ (da $K(p) \neq 0$)

$K(p) > 0 \to \det > 0 \to$ Index $= 0$ oder 2

$K(p) < 0 \to \det < 0 \to$ Index $= 1$

$\to \chi(S) = \#\{p \in S \mid N(p) = p_\pm, K(p) > 0\} - \#\{p \in S \mid N(p) = p_\pm, K(p) < 0\}$

p_+ regulär für N (und analog für p_-)

$\to \deg(N) = \#\{p \in N^{-1}(p_+) \mid K(p) > 0\} - \#\{p \in N^{-1}(p_+) \mid K(p) < 0\}$

$\to \chi(S) = 2 \deg(N)$

- $DN_p : T_pS \to T_pS$

$\Rightarrow$ $(DN_p)^* : \Lambda^2 T_pS \longrightarrow \Lambda^2 T_pS$
ist Multiplikation mit $K(p) = \det(DN_p)$

$\Rightarrow$ $N^* \mathrm{vol}_{S^2} = K(p)\,\mathrm{vol}_{S^2}$

$\Rightarrow$ $\int_S K\,\mathrm{vol}_S = \int_{S^2} N^* \mathrm{vol}_{S^2} = \deg(N) \cdot \int_{S^2} \mathrm{vol}_{S^2} = 4\pi \cdot \deg(N)$

$\Rightarrow$ $\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S K\,\mathrm{vol}_S$