Darstellungstheorie kompakter Lie-Gruppen

- $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ abgeschlossene Untergruppe

  zB $G = GL(n, \mathbb{R})$, $G = U(n)$

- G – Darstellung:

  $$\pi : G \longrightarrow Aut(V) \overset{\sim}{=} GL(N, \mathbb{C})$$ stetiger Gruppenhomomorphismus

  ↑ falls $V \cong \mathbb{C}^N$ $\qquad \pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$

- Motivationen für das Studium von G-Darstellungen

  - G realisiert (dargestellt) als Matrixgruppe, interessant z.B. für endliche Gruppen
  - häufige Situation: G wirkt auf einem Vektorraum V $\qquad$ zB: V = Kohomologien = Tangentialräume = Lösungsräume von DGLs

    Darstellungstheorie ≙ Untersuchung dieser Wirkung

    zB DGL in $\mathbb{R}^3$ mit Rotationssymmetrie
    ⇒ Raum der Lösungen ist rotationssymmetrisch
    → Raum der Lösungen ist eine SO_3-Darstellung

  - $EM = P_{SO(n)} \times_\pi E$, $\quad \pi : SO(n) \to Aut(V)$

    Studium assoziierter Bündel ≙ Studium von SO_n-Darstellungen

    zB
    - $E = E_0 \oplus E_1$ als SO_n-Darstellung
      ⇒ $EM = E_0M \oplus E_1M$ als ass. VB
    - parallele Schnitte in EM ≙ SO_n-invarianten Vektoren in E

  - algebraische Krümmungstensoren

    $$R \in Sym^2(\Lambda^2 V) \cap \ker b, \qquad b = \text{Bianchi-Abbildung}, \; V = T_xM$$

    $$Sym^2(\Lambda^2 V) = \Lambda^4 V \oplus \ker b \quad \text{als } SO_n\text{-Darstellung}$$

    $$\ker b = \mathbb{R} \oplus Sym_0^2 V \oplus Sym^{2,2} V$$

    Teilchen mit Spin $\qquad$ ≙ $\quad$ R $\quad$ scal $\quad$ Ric$_0$ $\quad$ W

① Matrix - Lie - Gruppen

Definition: Eine Matrix - Lie - Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe

$$G \subset GL(n, \mathbb{C}).$$

Bemerkung:
- G ist eine Matrix-Lie-gruppe, falls für $A_m \in G$, $\lim A_m = A$ folgt $A \in G$ oder A ist nicht invertierbar
- In allen relevanten Beispielen ist G sogar abgeschlossen in $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$
- Es gibt Untergruppen von $GL(n, \mathbb{C})$, die keine Matrix-Lie-Gruppen, aber doch Lie-gruppen sind.

Definition: Eine Matrix-Lie-Gruppe heißt kompakt, falls sie beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{C}^{n^2}$ ist:

① $A_n \in G$, $\lim A_n = A \Rightarrow A \in G$

② $\exists\, C : |A_{ij}| \leq C$ für alle $A \in G$, alle i,j

Definition: Eine Matrix-Lie-gruppe G heißt zusammenhängend, falls je zwei Matrizen in G durch einen stetigen Weg in G verbunden werden können:

$$A, B \in G \Rightarrow \exists\, A : [0,1] \to G \text{ stetig}, \quad A(0) = A, \; A(1) = B$$

Bemerkung: Eine beliebige Matrix - Lie - gruppe ist disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten, Elemente in den Komponenten können durch Wege verbunden werden, nicht aber Elemente in verschiedenen Komponenten

Satz: Sei G eine Matrix-Lie-gruppe dann ist die Zusammenhangskomponente der Eins (also des Einselementes der gruppe) ein Normalteiler in G.

Definition: Eine Matrix-Lie-Gruppe heißt einfach-zusammenhängend, falls sie zusammenhängend ist und sich jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

d.h.: $A: [0,1] \to G$ stetig, $A(0) = A(1)$

$\Rightarrow \exists\ H: [0,1] \times [0,1] \to G$ stetig

mit: (i) $H(s,0) = H(s,1)$

(ii) $H(0,t) = A(t)$

(iii) $H(1,t) = H(1,0) \quad \forall t$

Bemerkung:
- G einfach-zusammenhängend heißt $\pi_1(G) = 1$
- zu jeder Gruppe G gehört eine Überlagerung $\tilde{G} \to G$ mit Faser $\pi_1(G)$, für die $\pi_1(\tilde{G}) = 1$ gilt (universelle Überlagerung).

Beispiele:

(1) $GL(n, \mathbb{C})$
- nicht kompakt
- zusammenhängend
- $\pi_1(GL(n,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$

(2) $GL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{C})$
- nicht kompakt
- zwei Zusammenhangskomponenten
- $\pi_1(GL(n,\mathbb{R})^+) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 3$

(3) $SL(n, \mathbb{C}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \}$

spezielle lineare Gruppe
- nicht kompakt (abgeschlossen)
- zusammenhängend
- einfach-zus.

analog: $SL(n,\mathbb{R})$
- nicht kompakt, (abgeschlossen)
- zusammenhängend
- $\pi_1(SL(n,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 3$

  $\pi_1(SL(2,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$

(4) $O(n) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A \cdot A^{tr} = E \}$
- kompakt
- zwei Zus. komponenten

$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$
- kompakt
- Zus.
- $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 3$

  $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$

$SO(n) \subset O(n)$
als Zusammenhangskomponente der Eins

Spin-Gruppen:
$$\mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} SO(n)$$

5. $U(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot \bar{A}^{tr} = E \}$

- kompakt
- zusammenhängend
- $\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$

$SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \}$

- kompakt
- zus.
- einfach-zus.

6. $O(n, \mathbb{C}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot A^{tr} = E \}$ $\quad (\to \det A = \pm 1)$

$= \{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid h(Ax, Ay) = h(x, y) \}$

wobei: $h(x, y) = \sum_i x_i y_i \,, \quad x, y \in \mathbb{C}^n$

- nicht-kompakt
- nicht-zus. ?

$SO(n, \mathbb{C}) = \{ A \in O(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1 \}$

- nicht-kompakt
- zus. ?
- $\pi_1(SO(n, \mathbb{C})) = \mathbb{Z}_2$ $\quad n \geq 3$

7. <u>Die symplektischen Gruppen</u>

$b(x, y) := \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k) \qquad x, y \in \mathbb{R}^{2n}$

schief-symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{2n}$ (symplektische Form)

$Sp(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid b(Ax, Ay) = b(x, y) \}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}^{2n}$

reelle symplektische Gruppe

<u>Bemerkungen</u>:
- $b(x, y) = \langle x, Jy \rangle \,, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} , \ J^2 = -E_{2n}$
- $A \in Sp(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow A^{tr} J A = J$
- $A \in Sp(n, \mathbb{R}) \to \det A = 1$ $\quad$ ($\det A = \pm 1$ klar)
- $Sp(n, \mathbb{R})$ tritt in der klassischen Mechanik auf

metaplektische Gruppe

- nicht-kompakt
- zus
- $\pi_1(Sp(n, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$

$Sp(n, \mathbb{C}) = \{ A \in GL(2n, \mathbb{C}) \mid b(Ax, Ay) = b(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^{2n} \}$

$= \{ A \in GL(2n, \mathbb{C}) \mid A^{tr} J A = J \}$

komplexe symplektische Gruppe

- nicht-kompakt
- zus.
- einfach-zus.

- $\det A = 1$

$Sp(n) = Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$

<u>kompakte symplektische Gruppe</u>

- kompakt
- zus.
- einfach-zus.

<u>Bemerkungen</u>: • $Sp(1) = SU(2) = S^3$

• man kann $Sp(n)$ auch mit Hilfe der Quaternionen definieren

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \quad , \; x,y \in \mathbb{H}^n$$

symplektisches Skalarprodukt

$$= h(x,y) + j\, b(x,y)$$ in der Identifizierung $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^{2n}$

wobei • h eine Hermitische Form auf $\mathbb{C}^{2n}$ ist

• b eine symplektische Form auf $\mathbb{C}^{2n}$ ist

$$\Rightarrow \; Sp(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{H}) \mid H(Ax, Ay) = H(x,y) \;\; \forall x,y \in \mathbb{H}^n \}$$
$$= U(n, \mathbb{H})$$

<u>Bemerkungen</u>: •
$$\left.\begin{array}{l} GL(n,\mathbb{H}) \supset Sp(n) \\ GL(n,\mathbb{C}) \supset U(n) \\ GL(n,\mathbb{R}) \supset O(n) \end{array}\right\}$$ analoge Definition via Skalarprodukt $\rightsquigarrow$ klassische Serien

•
$$\begin{tikzcd}
 & & GL^+(2n,\mathbb{R}) & & \\
GL^+(n,\mathbb{R}) \arrow[r, hook] & GL(n,\mathbb{R}) \arrow[r, hook] & GL(n,\mathbb{C}) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & GL(n,\mathbb{H}) \arrow[r, hook] & GL(2n,\mathbb{C}) \\
SO(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & O(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & U(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Sp(n) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Sp(n,\mathbb{C}) \arrow[u, hook] \\
 & & SO(2n) & U(2n) &
\end{tikzcd}$$

• Jede Bilinearform (allgemeiner jeder Tensor) definiert eine Lie-Gruppe

• $h_{p,q}(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_{p+q} y_{p+q} \quad , x,y \in \mathbb{R}^{p+q}$

$$\rightarrow \; O(p,q) = \{ A \in GL(p+q, \mathbb{R}) \mid h_{pq}(Ax, Ay) = h_{pq}(x,y) \}$$

verallgemeinerte orthogonale Gruppe

$O(3,1)$ = Lorentz-Gruppe
- nicht kompakt
- vier Zus. komponenten

analog:
$U(p,q)$
$Sp(p,q)$
$SO(p,q)$