② Lie - Algebren

Ziel: Funktor $LG \to LA$
$G \mapsto \mathfrak{g}$

Sei $X \in M_n(\mathbb{C})$ dann definiert man:

$$e^X = \exp X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \qquad (*)$$

Satz: Für jedes $X \in M_n(\mathbb{C})$ konvergiert die Reihe in $(*)$ und $X \mapsto \exp X$ ist eine stetige Funktion

zum Beweis: $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, $\|X \cdot Y\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$

$\to \sum \left\|\frac{X^m}{m!}\right\| \leq \sum \frac{\|X\|^m}{m!} = e^{\|X\|} < \infty$

$\to$ die Reihe konvergiert absolut
$\to$ die Folge der Partialsummen ist eine Cauchy-Folge
$\to$ die Reihe konvergiert

Satz: Seien $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, dann gilt:

① $e^0 = E$

② $(e^X)^* = e^{X^*}$ $\qquad (X^* = \bar{X}^t)$

③ e^X ist invertierbar, $(e^X)^{-1} = e^{-X}$

④ $XY = YX \Rightarrow e^{X+Y} = e^X \cdot e^Y$

⑤ $C \in GL(n,\mathbb{C}) \to C e^X C^{-1} = e^{CXC^{-1}}$

zum Beweis: zu ④ $XY = YX \Rightarrow (X+Y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k Y^{m-k}$

$$e^X \cdot e^Y = (E + X + \dots)(E + Y + \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!} \cdot \frac{Y^{m-k}}{(m-k)!}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^k Y^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (X+Y)^m = e^{X+Y}$$

④ $\Rightarrow$ ③

⑤: $(C \cdot X \cdot C^{-1})^m = C \cdot X^m \cdot C^{-1}$

<u>Satz:</u> Sei $X \in M_n(\mathbb{C})$, dann ist e^{tX} eine glatte Kurve in $M_n(\mathbb{C})$ und es gilt

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} = X$$

<u>Beweis:</u> Ableitung von Potenzreihen

<u>Satz:</u> Die Abbildung $X \mapsto e^X$ ist ein lokaler Homöomorphismus, auf einer Umgebung der $0 \in M_n(\mathbb{C})$

↗ B. Hall

Umkehrabbildung $\log A = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(A-I)^m}{m}$

<u>Satz:</u> Sei $X \in M_n(\mathbb{C})$, dann gilt: $\det(e^X) = e^{\operatorname{tr} X}$

<u>Beweis:</u>
- X sei diagonalisierbar: $\exists\, C: X = C \cdot \operatorname{diag} \lambda_i \cdot C^{-1}$
  $\to e^X = C \cdot \operatorname{diag} e^{\lambda_i}\, C^{-1}$, $\operatorname{tr} X = \sum \lambda_i$, $\det e^X = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i}$
- X beliebig: die diagonalisierbaren Matrizen liegen dicht in der Menge aller Matrizen

<u>Definition:</u> Eine 1-parametrige Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist eine stetige Abbildung $A: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$ mit:

① $A(0) = E$

② $A(t+s) = A(t) \cdot A(s) \qquad \forall\, t, s \in \mathbb{R}$

<u>Satz:</u> Sei A eine 1-parametrige Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $X \in M_n(\mathbb{C})$ mit

$$A(t) = e^{tX}$$

<u>zum Beweis:</u> <u>Eindeutigkeit</u>: $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t) = X$

<u>Existenz:</u>
- $B_\varepsilon \subset M_n(\mathbb{C})$ sei ein Ball um 0, auf dem $\exp$ ein lokaler Homöomorphismus ist, $U := \exp(B_{\varepsilon/2})$

↗ B. Hall

- $\exists\, t_0 > 0: A(t) \in U \quad \forall\, t: |t| \leq t_0$

$X := \frac{1}{t_0} \log(A(t_0)) \; \ldots \qquad A(t) = e^{tX}$

Definition: Die Lie-Algebra einer Matrix-Lie-Gruppe G ist definiert als

$$\mathfrak{g} = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid e^{tX} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

Bemerkung: Diese Definition der Lie-Algebra von G stimmt überein mit den Standarddefinitionen

$$\mathfrak{g} = T_e G = \text{Menge der Links-invarianten VF auf } G$$

Beispiele: ① $G = GL(n,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$

$G = GL(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

② $G = SL(n,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \}$

analog: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$

da $X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \det e^{tX} = 1 \ \forall t \Leftrightarrow e^{t \cdot \operatorname{tr} X} = 1 \Leftrightarrow t \cdot \operatorname{tr} X \in 2\pi \mathbb{Z} \ \forall t \Leftrightarrow \operatorname{tr} X = 0$

③ $G = U(n) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \bar{X}^{tr} = -X \}$

da: $(e^{tX})^* = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX} \Leftrightarrow X^* = -X$ (Ableitung nach t)

$G = SU(n) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n) = \{ X \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{tr} X = 0 \}$

④ $G = O(n) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^{tr} = -X \}$

da: $(e^{tX})^{tr} = (e^{tX})^{-1} \Leftrightarrow X^{tr} = -X$

$G = SO(n) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ (da $SO(n)$ Zus. komp. der Eins)

⑤ $G = Sp(n,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{tr} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A \in M_n(\mathbb{C}) \\ B, C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ symmetrisch} \end{array} \right\}$

Bemerkung: Mit Hilfe der Lie-Algebren kann man die Dimension der Lie-Gruppen (als Mfk.) bestimmen.

zB $\dim O(n) = \dim \Lambda^2 \mathbb{R}^n = \frac{1}{2} n(n-1)$

<u>Satz:</u> Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe, $X \in \mathfrak{g}$, dann ist e^X in der Zusammenhangskomponente der Eins von G

<u>Beweis:</u> $c(t) = e^{tX}$ ist eine Kurve in G mit $c(0) = E$, $c(1) = X$

<u>Folgerung:</u> Die Lie-Algebra von G ist gleich der Lie-Algebra der Zus.komponente der Eins $G_0 \subset G$.

<u>Satz:</u> Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann gilt:

① $A \cdot X \cdot A^{-1} \in \mathfrak{g} \quad \forall X \in \mathfrak{g},\ A \in G$

② $sX \in \mathfrak{g} \quad \forall X \in \mathfrak{g},\ s \in \mathbb{R}$

③ $X + Y \in \mathfrak{g} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$

④ $XY - YX \in \mathfrak{g}$

<u>Bemerkung:</u>
- Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist nach ②, ③ ein reeller (!) Vektorraum. (i.A. $iX \notin \mathfrak{g}$)
- Man definiert die <u>Lie-Klammer</u> (= Kommutator) von $A, B \in \mathfrak{g}$ durch

  $[A, B] := AB - BA$
- $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ ist eine abstrakte Lie-Algebra, d.h. die Abbildung $[\cdot\,;\cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist bilinear und
  - $[A, B] = -[B, A] \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}$
  - $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad \forall A, B, C \in \mathfrak{g}$

    (Jacobi-Identität)

<u>zum Beweis:</u>
- $e^{tAXA^{-1}} = A\, e^{tX} A^{-1}$
- $e^{t(X+Y)} = \lim\limits_{m \to \infty} \left(e^{tX/m} \cdot e^{tY/m} \right)^m$
- $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX} = XY - YX$

$\rightarrow XY - YX = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(e^{hX} Y e^{-hX} - Y \right) \in \mathfrak{g}$

<u>Definition</u>: Seien G, H Matrix-Lie-Gruppen. Ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\phi: G \to H$ heißt <u>Lie-Gruppen-Homomorphismus</u>.

<u>Bemerkung</u>: Jede Matrix-Lie-Gruppe ist eine Lie-Gruppe und stetige Gruppenhomomorphismen sind automatisch glatt

<u>Satz</u>. Sei $\phi: G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann existiert eine eindeutig bestimmte reelle lineare Abbildung

$$\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \quad \text{mit} \quad \phi(e^{x}) = e^{\varphi(x)} \quad \forall x \in \mathfrak{g}. \qquad (*)$$

Die Abbildung φ hat folgende Eigenschaften.

① $\varphi(AXA^{-1}) = \phi(A)\,\varphi(x)\,\phi(A)^{-1} \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ A \in G$

② $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$. d.h. φ ist ein Hom. von Lie-Algebren

③ $\varphi(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(e^{tX}) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$

<u>Bemerkung</u>: • φ ist das Differential von ϕ, $\varphi = d\phi$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow[\phi]{} & H \end{array}$$

• Jeder Gruppen-Hom. definiert also einen Lie-Algebren-Hom. mit $(*)$. In gewissen Fällen gilt auch die Umkehrung:

<u>Satz</u>: Seien G, H Matrix-Lie-Gruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, sei $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebren-Hom.. Ist G einfach-zus. dann existiert ein eindeutig bestimmter Gruppen-Hom. $\phi: G \to H$ mit $(*)$.

<u>Folgerung</u>: Zwei einfach-zus. Lie-Gruppen sind isomorph, falls ihre Lie-Algebren isomorph sind.

<u>Satz</u>: Seien $\phi_1, \phi_2: G \to H$ zwei Gruppen-Hom. mit , G zus.! Differentialen φ_1, φ_2. Dann gilt:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \phi_2$$

Definition: Die <u>adjungierte Darstellung</u> einer Matrix-Lie-Gruppe ist definiert durch:

$$\mathrm{Ad} : \left. \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ A & \longmapsto & \mathrm{Ad}_A \end{array} \right\}$$

mit $\mathrm{Ad}_A(X) = A X A^{-1}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Satz: Die adjungierte Darstellung hat folgende Eigenschaften:

① $\mathrm{Ad}_A^{-1} = \mathrm{Ad}_{A^{-1}}$

② Ad ist ein Gruppen-Hom.: $\mathrm{Ad}_{A \cdot B} = \mathrm{Ad}_A \cdot \mathrm{Ad}_B$

③ Ad_A ist ein Lie-Algebren-Hom.: $\mathrm{Ad}_A([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)]$

④ Ad ist stetig

Bemerkung: Für Matrizengruppen ist Ad_A das Differential der Konjugationsabbildung $\alpha_A : G \to G$, $\alpha_A(B) = ABA^{-1}$

Satz: Das Differential des Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ist gegeben durch

$$\mathrm{ad} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ X & \longmapsto & \mathrm{ad}_X \end{array}$$

mit $\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Beweis: $\mathrm{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}(e^{tX})Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tX} Y e^{-tX}) = [X,Y]$