③ Grundlagen der Darstellungstheorie

Definition. • Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe. Eine endlich-dimensionale komplexe Darstellung von G ist ein Lie-Gruppen-Hom.

$$\pi : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Eine endlich-dimensionale komplexe Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist ein Lie-Algebren-Hom

$$\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

Bemerkung: Reelle Darstellungen sind entsprechend Lie-Gruppen- bzw Lie-Algebren Homomorphismen nach $GL(n, \mathbb{R})$ bzw $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

weitere Bezeichnungen

- π ist eine treue Darstellung $\Leftrightarrow$ π ist injektiv
- $\pi : G \to GL(V)$ sei eine G-Darstellung

  $W \subset V$ ist ein invarianter Unterraum $\Leftrightarrow$ $\pi(A) w \in W \quad \forall w \in W$

  π ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $V, \{0\}$ sind die einzigen invarianten Unterräume in V

- Seien $\pi : G \to GL(V)$, $\rho : G \to GL(W)$ G-Darstellungen

  $\varphi : V \to W$ linear ist äquivariant $\Leftrightarrow$ $\varphi(\pi(g) v) = \rho(g) \varphi(v)$

- Zwei Darstellungen heißen isomorph, falls es einen äquivarianten Isomorphismus gibt.
- $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ = Raum aller G-äquivarianten Homomorphismen

Bemerkung: Analoge Bezeichnungen gelten für Darstellungen von Lie-Algebren.

Satz: Jede G-Darstellung $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ definiert eine Darstellung $\pi_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ der Lie-Algebra von G mit:

$$\pi_*(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(e^{tX})$$

und $\pi(e^X) = e^{\pi_*(X)}$ und $\pi_*(AXA^{-1}) = \pi(A)\,\pi_*(X)\,\pi(A)^{-1}$.

Beweis: π_* ist das Differential von π.

Satz: Sei π eine G-Darstellung mit Differential π_*. Ist G zus., so ist π irreduzibel gdw π_* irreduzibel ist.

Beweis: "$\Rightarrow$" $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ sei irreduzibel

Annahme: $W \subset V$ ist $\mathfrak{g}$-invariant

$A \in G \to \exists X_1, \dots X_n \in \mathfrak{g}: A = e^{X_1} \cdots e^{X_n}$ da G zus.

W ist invariant unter $\pi_*(X_i) \to W$ ist invariant unter $\exp(\pi_*(X_i)) = E + \pi_*(X_i) + \pi_*(X_i)^2/2 + \dots$

$\to W$ ist invariant unter $\pi(A) = e^{\pi_*(X_1)} \cdots e^{\pi_*(X_n)}$

$\to W$ ist G-invariant, d.h. $W = V$ oder $W = \{0\}$

"$\Leftarrow$" $\pi_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ sei irreduzibel

Annahme: $W \subset V$ ist G-invariant

$\to W$ ist $\pi(\exp tX)$-invariant

$\to W$ ist invariant unter $\pi_*(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp tX)$

$\to W$ ist $\mathfrak{g}$-invariant, d.h. $W = V$ oder $W = \{0\}$

Satz: Sei G eine zus. Lie-Matrix-Gruppe und seien π_1, π_2 zwei G-Darstellungen mit Differentialen $(\pi_1)_*, (\pi_2)_*$. Dann gilt:

π_1, π_2 isomorph als G-Darstellung $\Leftrightarrow$ $(\pi_1)_*, (\pi_2)_*$ isomorph als $\mathfrak{g}$-Darstellung

Beweis: (ÜA)

Satz: Sei G eine zus. Matrix-Lie-Gruppe, dann läßt sich jedes $A \in G$ schreiben als

$$A = e^{X_1} \cdot \ldots \cdot e^{X_m}$$

für geeignete $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{g}$.

Beweis:

- $\exists\ A: [0,1] \longrightarrow G$ stetig
  mit: $A(0) = E, \ A(1) = A$

- $\exists\ V \subset G, V' \subset \mathfrak{g}$ offene Umgebungen von E bzw. 0
  mit $\exp: V' \xrightarrow{\simeq} V$ Homöomorphismus

$\rightarrow$ für jedes $a \in [0,1]$ ist die Abbildung

$$F_a : [0,1] \longrightarrow G \times G \longrightarrow G, \qquad t \mapsto (A_a, A_t) \mapsto A_a^{-1} A_t \qquad A_t := A(t)$$

stetig und $F_a(a) = E$

$\rightarrow$ $\forall\ a \in [0,1]\ \exists$ offene Umgebung $U_a \subset [0,1]$, $a \in U_a$
mit $A_a^{-1} \cdot A_t \in V$ für alle $t \in U_a$

$\rightarrow$ $\exists\ t_i : \ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ (da $[0,1] \subset \bigcup_a U_a$, $[0,1]$ ist kompakt)
mit $A_{t_{k-1}}^{-1} A_{t_k} \in V$

$\rightarrow$ $\exists\ X_k \in \mathfrak{g}$ mit $A_{t_{k-1}}^{-1} A_{t_k} = e^{X_k}$

$\rightarrow$ $A = (A_{t_0}^{-1} A_{t_1})(A_{t_1}^{-1} A_{t_2}) \cdot \ldots \cdot (A_{t_{m-1}}^{-1} A_{t_m})$ $\qquad A_{t_0} = E, A_{t_m} =$

$= e^{X_1} \cdot \ldots \cdot e^{X_m}$

Beispiele: Sei $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ eine Matrix-Lie-Gruppe

① Standard-Darstellung: $G \to GL(n,\mathbb{C})$, $A \mapsto A$ (oder $G \to GL(n,\mathbb{R})$

z.B. $SO(3) \hookrightarrow GL(3,\mathbb{R})$ 3-dim. reelle Darstellung

$SU(2) \hookrightarrow GL(2,\mathbb{C})$ 2-dim. komplexe Darstellung

② Triviale Darstellung: $G \to GL(1,\mathbb{C})$ (analog: $GL(1,\mathbb{R})$

$A \mapsto E$ $\forall A \in G$

E = Einheitsmatrix

oder auch: $G \to GL(n,\mathbb{C})$, $g \mapsto E$ $\forall g$

$\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(1,\mathbb{C})$

$X \mapsto 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}$

Bemerkung: Die triviale Darstellung ist irreduzibel.

③ Adjungierte Darstellung:

$$\begin{array}{ccc} ad: \mathfrak{g} & \longrightarrow & End(\mathfrak{g}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Ad: G & \longrightarrow & Aut(\mathfrak{g}) \end{array}$$

$ad = Ad_*$

(ÜA) Bemerkung: Die Standard-Darstellung von $SO(3)$ ist isomorph zur adjungierten Darstellung. Beides sind 3-dim. reelle Darstellungen. (analog für $\mathfrak{so}(3)$)

(siehe S. 10.)

④ Lineare Algebra von Darstellungen

- direkte Summe: $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2 : G \to Aut(V_1 \oplus V_2)$

$\pi(A)(v_1 \oplus v_2) = (\pi_1(A)v_1) \oplus (\pi_2(A)v_2)$

- Tensor-Produkt: $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 : G \to Aut(V_1 \otimes V_2)$

(Clebsch-Gordan)

$\pi(A)(v_1 \otimes v_2) = (\pi_1(A)v_1) \otimes (\pi_2(A)v_2)$

$\Rightarrow \pi_*(X)(v_1 \otimes v_2) = (\pi_{1*}(X)v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (\pi_{2*}(X)v_2)$

- duale Darstellung: $\pi^* : G \to Aut(V^*)$

$\pi^*(A) = \pi(A^{-1})^{tr}$

weitere Konstruktionen:

- $\pi_1 : G \to \mathrm{Aut}(V_1)$, $\pi_2 : H \to \mathrm{Aut}(V_2)$

  $\Rightarrow \pi_1 \otimes \pi_2 : G \times H \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_1 \otimes V_2)$

  $(\pi_1 \otimes \pi_2)(A,B)\, v_1 \otimes v_2 = (\pi_1(A)v_1) \otimes (\pi_2(B)v_2)$

  $(\pi_1 \otimes \pi_2)_* \ \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$

  $(\pi_1 \otimes \pi_2)(X+Y)\, v_1 \otimes v_2 = \pi_{1*}(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \pi_{2*}(Y)v_2$

<u>Bemerkung</u>: Alle irreduziblen $G \times H$-Darstellungen sind von dieser Form (Beweis: später)

- $\hat{\pi} : G \to \mathrm{Aut}(\Lambda^k V)$

  $\hat{\pi}(A)\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = (\pi(A)v_1) \wedge \ldots \wedge (\pi(A)v_k)$

  $\hat{\pi}_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\Lambda^k V)$

  $\hat{\pi}_*(X) v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = (\hat{\pi}_*(X)v_1) \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k + \ldots + v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\pi}_*(X)v_k$

- $\hat{\pi} : G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}^k V)$

  $\hat{\pi}(A)\, v_1 \cdots v_k = (\pi(A)v_1) \cdot \ldots \cdot (\pi(A)v_k)$

- $\hat{\pi} : G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Hom}(V,W))$, $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$

  $(\hat{\pi}(A)\varphi)v = (\pi_W(A) \circ \varphi \circ \pi_V^{-1}(A))v$ $\qquad \varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

<u>Bemerkung</u>:
- Im Weiteren wird π meist weggelassen: $\pi(A)v = A \cdot v$
- Sei V ein komplexer VR man definiert den konjugierten VR $\overline{V}$ als V mit der gleichen Addition und mit der skalaren Multiplikation $(\lambda, v) \mapsto \bar{\lambda} v$

  konjugierte Darstellung: V - G-Darstellung $\Rightarrow \overline{V}$ ist G-Darstellung
  $\bar{\pi}(g)v = \pi(g)v$