Darstellungen von $SU(2)$

- $V_0 = \mathbb{C}$ triviale Darstellung, $V_1 = \mathbb{C}^2$ Standard-Darstellung

- $V_n =$ Raum der homogenen Polynome vom Grad n in z_1, z_2 $\hat{=} \operatorname{Sym}^n \mathbb{C}^2$
$= \{ P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \mid P(z_1,z_2) = a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} z_2 + \ldots + a_n z_2^n \}$

Basis in V_n: $P_k = z_1^k z_2^{n-k}$, $0 \le k \le n$, $\to \dim V_n = n+1$

$SU(2)$-Darstellung auf V_n: $(g \cdot P)z = P(g^{-1}z)$ $g \in SU(2)$, $z = \binom{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}^2$

explizit: $g = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = \bar{g}^{tr}$

$$g^{-1}z = (\bar{a} z_1 + \bar{b} z_2, -b z_1 + a z_2)$$

$$\Rightarrow (g \cdot P_k)(z_1,z_2) = (\bar{a} z_1 + \bar{b} z_2)^k (-b z_1 + a z_2)^{n-k}$$

Satz: Die $SU(2)$-Darstellungen V_n sind irreduzibel.

Beweis: Sei $W \subset V_n$ ein nicht-trivialer invarianter Unterraum

- $H = \operatorname{diag}(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}) \in SU(2)$

$\Rightarrow H \cdot z_1^k z_2^{n-k} = e^{i(n-2k)} z_1^k z_2^{n-k}$ alle Eigenwerte sind verschieden

$\Rightarrow \{ z_1^k z_2^{n-k} \mid k = 0,\ldots,n \}$ ist eine Basis aus H-Eigenvektoren in V_n

$\Rightarrow \exists k_0 : z_1^{k_0} z_2^{n-k_0} \in W$ da W ist invariant unter H, d.h. W wird von gewissen $z_1^j z_2^{n-j}$ aufgespannt

- $A_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SU(2)$, $B_t = \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SU(2)$

$\to (A_t \pm i B_t) z_1^{k_0} z_2^{n-k_0} \in W$

$\to \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (A_t \pm i B_t) z_1^{k_0} z_2^{n-k_0} \in W$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A_t \pm i B_t) z_1^{k_0} z_2^{n-k_0} = \begin{cases} k_0 z_1^{k_0-1} z_2^{n-k_0+1} \\ (n-k_0) z_1^{k_0+1} z_2^{n-k_0-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow W = V_n$ d.h. V_n ist irreducibel

Das Lemma von Schur

Satz. (1) Seien V, W irreduzible reelle oder komplexe G-Darstellungen und sei $\phi: V \to W$ eine G-äquivariante Abbildung, dann ist $\phi \equiv 0$ oder ϕ ist ein Isomorphismus

(2) Sei V eine irreduzible komplexe Darstellung von G und sei $\phi: V \to V$ eine G-äquivariante Abbildung, dann ist $\phi = \lambda \, \mathrm{Id}_V$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

(3) Seien V, W irreduzible komplexe G-Darstellungen und seien $\phi_1, \phi_2 : V \to W$ nicht-triviale G-äquivariante Abbildungen, dann ist $\phi_1 = \lambda \phi_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Für Darstellungen von Lie-Algebren gelten die gleichen Aussagen

Beweis: zu (1) • $\phi: V \longrightarrow W$ G-äquivariant

$\Rightarrow$ $\ker \phi \subset V$ ist G-invariante UR

$\rightarrow$ $\ker \phi = \{0\}$ oder $\ker \phi = V$ dh $\phi = 0$

• sei ϕ injektiv, $-$ $\operatorname{Im} \phi \subset W$ ist G-invariante UR

$\rightarrow$ $\operatorname{Im} \phi = W$ dh ϕ ist ein Isomorphismus

zu (2) $\phi: V \longrightarrow V$ G-äquiv. , $\pi: G \to \mathrm{Aut}(V)$: $\phi \circ \pi(A) = \pi(A) \cdot \phi$ $(*)$

V $\mathbb{C}$-VR $\rightarrow$ ϕ hat wenigstens einen Eigenwert λ

$U := \{ v \in V \mid \phi(v) = \lambda v \} \subset V$ Eigenraum zum Eigenwert λ

$(*) \rightarrow U$ ist G-invariant , $U \neq \{0\}$

$\rightarrow U = V$ dh $\phi = \lambda \, \mathrm{Id}_V$

zu (3) $\phi_2 \neq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \phi_2$ ist ein Isomorphismus

$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : W \to W$ ist G-äquivariant

$\rightarrow \phi_1 \cdot \phi_2^{-1} = \lambda \, \mathrm{Id}$

<u>Folgerung</u>: Sei π eine irreduzible komplexe G-Darstellung und sei $A \in \mathrm{Zent}(G)$ im Zentrum von G, dann ist $\pi(A) = \lambda\,\mathrm{Id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$

<u>Bemerkung</u>: Die analoge Aussage gilt für Darstellungen von Lie-Algebren

<u>Beweis</u>: $A \in \mathrm{Zent}(G) \rightarrow \pi(A)\pi(B) = \pi(AB) = \pi(BA) = \pi(B)\pi(A)$

d.h.: $\pi(A)$ ist eine G-äquivariante Abbildung

$\rightarrow \pi(A) = \lambda\,\mathrm{Id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$

<u>Folgerung</u>: Jede irreduzible Darstellung (komplex) einer kommutativen Lie-Gruppe oder Lie-Algebra ist ein-dimensional.

<u>Beweis</u>: $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ sei irreduzible komplexe Darstellung

G abelsch $\Rightarrow G = \mathrm{Zent}(G) \rightarrow \pi(A) = \lambda_A\,\mathrm{Id} \quad \forall A \in G$

$\Rightarrow$ jeder Unterraum $W \subset V$ ist G-invariant

$\rightarrow \dim V = 1$, da V irreduzibel

<u>Bemerkung</u>: - $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{für } V \cong W \\ 0 & \text{für } V \not\cong W \end{cases}$

- V ist eine irreduzible G-Darstellung

$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$

Integration auf Lie-Gruppen

Satz: Sei G eine kompakte Lie-Gruppe dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\int_G : \mathcal{C}^0(G) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_G f(g)\,dg$$

mit: ① $\int_G$ ist linear, monoton und normiert $\quad (\int_G dg = 1)$

② $\int_G$ ist links-invariant, dh $\int_G f(hg)\,dg = \int_G f(g)\,dg$

Bezeichnung: • $\int_G$ heißt das invariante Integral von G,
• dg nennt man das Haar-Maß von G

Satz: Weitere Eigenschaften des invarianten Integrals sind:

$$\int_G f(g)\,dg = \int_G f(g\cdot h)\,dg = \int_G f(g^{-1})\,dg = \int_G f(\phi(g))\,dg$$

wobei $\phi: G \to G$ ein Lie-Gruppen-Hom. ist.

Definition: Eine G-Darstellung heißt unitär falls ein G-invariantes Skalarprodukt existiert: $(\pi(g)v, \pi(g)w) = (v,w)$
$\forall g \in G,\ v,w \in V$

Folgerung: Jede Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe ist unitär.

Beweis: $\pi: G \to \mathrm{Aut}(V)$ sei eine G-Darstellung
und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei ein beliebiges Skalarprodukt auf V (= Weyl's unitärer Trick)
man definiert: $(v,w) := \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle\,dg$

$\Rightarrow (\cdot,\cdot)$ ist ein invariantes Skalarprodukt.

$\Rightarrow \pi: G \to U(V)$ bzgl. $(\cdot,\cdot)$

<u>Definition:</u> Eine endlich-dimensionale Darstellung einer Lie-Gruppe oder Lie-Algebra heißt <u>vollständig reduzibel</u>, falls sie isomorph ist zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen.

<u>Bemerkung:</u> Für nicht-kompakte Gruppen existieren nicht-unitäre Darstellungen und Darstellungen, die reduzibel aber nicht vollständig reduzibel sind

<u>Folgerung:</u> Endlich-dimensionale Darstellungen kompakter Lie-Gruppen sind vollständig reduzibel.

<u>Beweis:</u> Sei G eine kompakte Lie-Gruppe

$\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ sei eine unitäre Darstellung, $(\cdot,\cdot)$ das invariante Skalarprodukt auf V

$W \subset V$ nicht-trivial, G-invariant

$\Rightarrow \quad V = W \oplus W^\perp$

$W^\perp$ ist ein G-invarianter UR: $\quad (\pi(g)w', w) = (w', \pi(g^{-1})w) = 0$ für $w' \in W^\perp$, $w \in W$

$\overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} \quad V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \quad$ da $\dim V < \infty$

<u>Bemerkung:</u>
- Insbesondere gilt die Folgerung für endliche Gruppen.
- Jede Darstellung V einer kompakten Gruppe G schreibt sich als

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i \qquad \text{mit } V_i \text{ irreduzible } G\text{-Darstellung}$$

$$\overset{\text{Schur}}{\longrightarrow} \quad \dim \mathrm{Hom}_G(W,V) = \dim \bigoplus_{j=1}^{N} \mathrm{Hom}_G(W,V_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \dim \mathrm{Hom}_G(W,V_j)$$

$$= \#\{ j \mid W \cong V_j \}$$

$$= \underline{\text{Multiplizität von } W \text{ in } V}$$

W-isotypische Komponente in V = Summe aller V_j, die isomorph zu W sind

<u>Bemerkungen:</u> • $V \cong \bigoplus_{W \in \hat{G}} \mathrm{Hom}_G(W, V) \otimes_{\mathbb{C}} W$ als G-Darstellung

wobei • $\hat{G}$ = Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer G-Darstellungen

• G mit trivialer Darstellung auf $\mathrm{Hom}_G(W, V)$

<u>Bezeichnung:</u> <u>Kanonische Zerlegung</u>

<u>ÜA:</u>

im Weiteren:

V endlich-dim. komplexe G-Darst.
G kompakt

- V ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$

- $\overline{V} \cong V^\vee$

- V irreduzibel $\Rightarrow$ das G-invariante Skalarprodukt ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl

- $V_1, V_2 \subset V$, V_1, V_2 irreduzibel und nicht äquivalent (als G-Darstellung)
  $\Rightarrow$ $V_1 \perp V_2$ bzgl. eines G-inv. Skalarproduktes auf V

- V ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ V^* ist irreduzibel

- Darstellung der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathbb{C}^2$:

  $$\pi : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - π ist <u>nicht</u> unitär
  - Man bestimme die invarianten Unterräume
  - π ist reduzibel aber <u>nicht</u> vollständig reduzibel
  - $\mathbb{R}$ hat überabzählbar viele nicht-isomorphe irreducible unitäre Darstellungen