Orthogonalitäts-Relationen

5. Vorlesung
13.11.08

Sei V eine komplexe G-Darstellung

$V^G := \{ v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G \}$ — Fixpunktmenge der G-Wirkung, UR!

Lemma: Die Abbildung $p(v) = \int_G gv\, dg$ ist eine Projektion auf V^G.

Beweis: • $p: V \to V^G$

da $h \cdot p(v) = h \int gv\, dg = \int hgv\, dg = p(v)$

• $p(v) = v$ für $v \in V^G$

da $\int gv\, dg = \int v\, dg = v$

Anwendung: G-Darstellung auf $\mathrm{Hom}(V,W)$: $(g \cdot f)v := g f(g^{-1}v)$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(V,W)^G = \mathrm{Hom}_G(V,W)$

$\Rightarrow f \mapsto \int g \cdot f\, dg$ ist die Projektion auf den Raum der äquivarianten Abbildungen

Satz: Sei V eine irreducible G-Darstellung. Dann gilt für $f \in \mathrm{End}(V)$:

$$\boxed{\int g \cdot f\, dg = \frac{1}{\dim V} \cdot tr(f) \cdot \mathrm{Id}_V}$$

Beweis: • V irreduzibel $\Rightarrow \mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C} \Rightarrow \int g \cdot f\, dg = c \cdot \mathrm{Id}_V$ $\quad c \in \mathbb{C}$

$$\overset{tr}{\Rightarrow} c \cdot \dim V = tr \int g \cdot f\, dg$$
$$= \int tr(g \cdot f)\, dg \qquad (tr \text{ ist linear})$$
$$= \int tr(\ell_g \circ f \circ \ell_{g^{-1}})\, dg$$
$$= \int tr(f)\, dg$$
$$= tr(f)$$

$$\Rightarrow c = \frac{tr(f)}{\dim V}$$

<u>Folgerung</u> (Orthogonalitäts-Relation): Sei V irreduzibel, dann gilt

① $$\int_G \langle g f(g^{-1}v), w\rangle dg = \frac{1}{\dim V} \cdot tr(f) \cdot \langle v, w\rangle$$

für alle $f \in End(V)$, $v, w \in V$

② $$\int_G \langle g^{-1} v_1, v_2\rangle \cdot \langle g w_2, w_1\rangle dg = \frac{1}{\dim V} \langle w_2, v_2\rangle \langle v_1, w_1\rangle$$

für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

<u>Beweis</u>: zu ②: Man nutzt ① für $f(u) = \langle u, v_2\rangle w_2$

<u>Bemerkung</u>: Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine unitäre G-Darstellung, dann schreibt sich ② als:

$$\int \overline{\langle g v_2, v_1\rangle} \cdot \langle g w_2, w_1\rangle dg = \frac{1}{\dim V} \overline{\langle v_2, w_2\rangle} \cdot \langle v_1, w_1\rangle$$

<u>Satz</u>. Seien V, W nicht-isomorphe irreduzible G-Darstellungen und sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein G-invariantes Skalarprodukt, dann gilt:

$$\int \overline{\langle g v_2, v_1\rangle} \cdot \langle g w_2, w_1\rangle dg = 0$$

<u>Beweis</u>: • Das Integral definiert eine Bilinearform $b: V \times \overline{W} \to \mathbb{C}$

da linear in v_1, konjugiert-linear w_1, $\overline{\langle g v_2, v_1\rangle} = \langle v_1, g v_2\rangle$
v_2, w_2 fixiert

• b ist G-äquivariant da $\int$ G-invariant, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ G-invariant

$\Rightarrow$ G-äquivariante Abbildung

$$b': V \longrightarrow Hom(\overline{W}, \mathbb{C}) = \overline{W}^* \cong W$$

$$b'(v) = b(v, \cdot)$$

$\to$ $b' \equiv 0$ nach dem Lemma von Schur

<u>Bemerkung:</u> Seien $w_1, \dots, w_n$ bzw $v_1, \dots v_n$ Orthonormal-Basen der irreduziblen G-Darstellungen W bzw. V

Matrixkoeffizienten: $r_{ij}(g, V) = \langle g v_j, v_i \rangle$

$r_{ke}(g, W) = \langle g w_e, w_k \rangle$

$$\rightarrow \int r_{ij}(g,V) \cdot \overline{r_{ke}(g,V)} = \frac{1}{\dim V} \delta_{ik} \cdot \delta_{je}$$

$$\int r_{ij}(g,V) \cdot \overline{r_{ke}(g,W)} = 0 \qquad \text{für } V \not\cong W$$

dh. die Matrixkoeffizienten irreduzibler unitärer G-Darstellungen bilden ein Orthonormalsystem in $C^0(G;\mathbb{C})$

<u>Definition:</u> Der Charakter einer G-Darstellung V ist die Funktion

$$\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \chi(g) = tr(\ell_g) \qquad (\ell_g(v) = g \cdot v)$$

<u>Satz:</u> Charaktere haben folgende Eigenschaften:

1. χ_V ist stetig (sogar C^∞)
2. $V \cong W \Rightarrow \chi_V = \chi_W$
3. $\chi_V(g h g^{-1}) = \chi_V(h)$
4. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
5. $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$
6. $\chi_{V^\vee}(g) = \chi_V(g^{-1})$
7. $\chi_{\bar{V}}(g) = \overline{\chi_V(g)} = \chi_V(g^{-1})$
8. $\chi_V(e) = \dim_{\mathbb{C}} V$

<u>zum Beweis:</u> zu 1: $\chi_V(g) = \sum_i r_{ii}(g, V)$

zu 2: $f : V \xrightarrow{\sim} W \rightarrow \ell_g^W \circ f = f \circ \ell_g^V$ (da G-äquiv)

$$\rightarrow \chi_V(g) = tr(\ell_g^V) = tr(f^{-1} \ell_g^W f) = tr(\ell_g^W) = \chi_W(g)$$

<u>Bemerkung:</u> Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit 3, die also konstant auf Konjugationsklassen sind, nennt man Klassenfunktionen.

Orthogonalitäts-Relation für Charaktere

Satz ① $\int \chi_V(g)\,dg = \dim V^G$

② $\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \int \chi_W(g) \cdot \overline{\chi_V(g)}\,dg = \dim \mathrm{Hom}_G(V,W)$

③ Seien V, W irreduzible G-Darstellungen, dann gilt

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } V \cong W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: zu ① $\dim V^G = tr(p) = tr \int \varrho_g\,dg = \int tr(\varrho_g)\,dg = \int \chi(g)\,dg$

zu ②: $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W)^G \overset{①}{\Rightarrow} \dim \mathrm{Hom}_G(V,W) = \int \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)\,dg$

aber $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \chi_{V^* \otimes W} = \overline{\chi_V} \cdot \chi_W = \int \chi_W(g)\,\overline{\chi_V(g)}\,dg$

Folgerung: ① Eine Darstellung ist bis auf Isomorphie durch ihren Charakter bestimmt, d.h.

$$V \cong W \iff \chi_V = \chi_W$$

② V ist irreduzibel $\iff \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$

Beweis: zu ①: $V = \bigoplus_j n_j V_j \quad (*)$ V_j paarweise nicht-isomorphe G-Darstellungen
$n_j =$ Vielfachheit von V_j in V

Die Darstellung V ist bis auf Isomorphie bestimmt durch die Multiplizitäten n_j

$(*) \Rightarrow \chi_V = \sum_j n_j \chi_{V_j}$ und $n_j = \langle \chi_V, \chi_{V_j} \rangle$

d.h. $\chi_V = \chi_W \Rightarrow \langle \chi_V, \chi_{V_j} \rangle = \langle \chi_W, \chi_{V_j} \rangle \Rightarrow V \cong W$

zu ②: V ist irreduzibel $\iff \dim \mathrm{Hom}_G(V,V) = 1$

$\iff \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$

Satz: Jede irreducible $SU(2)$ - Darstellung ist isomorph zu einer der Darstellungen V_n

Beweis: V_n = Raum der homogenen Polynome vom Grad n auf $\mathbb{C}^2$

$= \mathrm{span}\{ z_1^k z_2^{n-k} \mid k = 0, \dots, n \}$ $\qquad \dim V_n = n+1$

- $e(t) = \mathrm{diag}(e^{it}, e^{-it}) \in SU(2)$ $\qquad e: \mathbb{R} \to SU(2)$

$\rightarrow \chi_{V_n}(e(t)) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)t}$

- jedes Element von $SU(2)$ ist konjugiert zu einer Matrix $e(t)$

$\Rightarrow$ man erhält eine Bijektion: Klassenfunktionen auf $SU(2)$ $\longrightarrow$ 2π-periodische, gerade stetige Fkt. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$f \mapsto f \circ e$

($e(t)$ konjugiert zu $e(s)$ $\Leftrightarrow$ $s \equiv \pm t \mod 2\pi$)

- $\mathrm{span}\{ \chi_{V_n}(e(t)) \mid n \in \mathbb{N} \} = \mathrm{span}\{ \cos nt \mid n \in \mathbb{N} \}$

da $\kappa_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)t} = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t} = \cos nt + \kappa_{n-1}(t) \cos t$

- $\mathrm{span}\{\cos nt \mid n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht im Raum aller geraden, 2π-periodischen stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, d.h. die Charaktere χ_{V_n} liegen dicht im Raum der Klassenfunktionen auf $SU(2)$

- Sei W eine $SU(2)$-Darstellung, die zu keiner Darstellung V_n isomorph ist

$\Rightarrow \langle \chi_W, \chi_{V_n} \rangle = 0 \quad \forall n, \qquad \langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$

$\Rightarrow \chi_W = 0$ $\lightning$ $\quad$ da $\mathrm{span}\, \chi_{V_n}$ dichter Unterraum

Clebsch – Gordan – Formel

Satz:
$$\boxed{V_k \otimes V_\ell \cong \bigoplus_{j=0}^{q} V_{k+\ell-2j}}$$
für $q = \min\{k,\ell\}$

Beweis: zu zeigen ist: $\chi_{V_k}(e(t)) \cdot \chi_{V_\ell}(e(t)) = \sum_{j=0}^{q} \chi_{V_{k+\ell-2j}}(e(t))$

$$\Rightarrow \text{z.z.} \quad \sum_{\mu=0}^{k} e^{i(k-2\mu)t} \cdot \sum_{\nu=0}^{\ell} e^{i(\ell-2\nu)t} = \sum_{j=0}^{q} \sum_{\nu=0}^{k+\ell-2j} e^{i(k+\ell-2j-2\nu)t}$$

$$\Rightarrow \text{z.z.} \quad \sum_{\mu=0}^{k} x^{k-2\mu} \cdot \sum_{\nu=0}^{\ell} x^{\ell-2\nu} = \sum_{j=0}^{q} \sum_{\nu=0}^{k+\ell-2j} x^{k+\ell-2j-2\nu}$$

Die Formel folgt nach Ausmultiplizieren und Aufsummieren.

Bemerkung: • Es existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus

$$\pi : SU(2) \to SO(3)$$

mit $\ker \pi = \{\pm E\}$, E = Einheitsmatrix.

$\Rightarrow$
- Ist $\rho: SO(3) \to \mathrm{Aut}(W)$ eine irreduzible $SO(3)$-Darstellung, dann ist $\rho \circ \pi$ eine irreduzible $SU(2)$-Darstellung, in der $-E$ als Identität operiert.
- Ist V eine $SU(2)$-Darstellung, auf der $-E$ als Identität operiert, dann erhält man eine assoziierte $SO(3)$-Darstellung auf V

$\Rightarrow$ Die irreduziblen $SO(3)$-Darstellungen sind genau die Darstellungen V_{2n} (da hier $-E$ als Id operiert)

$\dim V_{2n} = 2n+1$

- Eine weitere Anwendung der Orthogonalitäts-Relation von Charakteren liefert:

  Die irreduziblen Darstellungen von $G \times H$ sind genau die Darstellungen $V \otimes W$ für irred. G-Darst. V, irred. H-Darst. W.