Komplexifizierung von Lie-Algebren

Definition: Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, dann ist die Komplexifizierung $V^{\mathbb{C}}$ von V der aller formaler Linearkombinationen $v_1 + i v_2$ mit $v_1, v_2 \in V$ und

$$i(v_1 + i v_2) = -v_2 + i v_1$$

Bemerkungen:
- Genauer müsste man $V^{\mathbb{C}}$ als Menge geordneter Paare definieren
- $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$
- $V^{\mathbb{C}}$ ist ein komplexer Vektorraum
- $V \subset V^{\mathbb{C}}$

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra. Die Komplexifizierung von $\mathfrak{g}$ ist die komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, mit $\mathbb{C}$-bilinear fortgesetzter Lie-Klammer.

Eine reelle Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt reelle Form einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ falls: $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

Beispiele:
- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ($\rightsquigarrow$ zwei reelle Formen)
- $\mathfrak{u}(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$
- $\mathfrak{su}(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$
- $\mathfrak{so}(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$
- $\mathfrak{sp}(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$

zum Beweis: $\mathfrak{u}(n) = \{ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \bar{A}^{tr} + A = 0 \}$

$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ beliebig $\rightarrow$ $X = \frac{1}{2}(X - \bar{X}^{tr}) + \frac{1}{2i}(X + \bar{X}^{tr}) \cdot i$

wobei: $\frac{1}{2}(X - \bar{X}^{tr}),\ \frac{1}{2i}(X + \bar{X}^{tr}) \in \mathfrak{u}(n)$

$\rightarrow$ $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) \oplus i\, \mathfrak{u}(n)$

Satz: Sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra mit Komplexifizierung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Dann hat jede endlich-dimensionale komplexe Darstellung π von $\mathfrak{g}$ eine Fortsetzung zu einer komplex-linearen Darstellung π von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, definiert durch:

(eindeutig bestimmt)

$$\pi(X+iY) = \pi(X) + i\,\pi(Y) \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Die $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-Darstellung π ist genau dann irreduzibel, wenn die $\mathfrak{g}$-Darstellung π irreduzibel ist.

zum Beweis:
- $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ irreduzible komplexe Darstellung

  $W \subset V$ $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-invariant $\rightarrow$ W ist $\mathfrak{g}$-invariant $\qquad \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

  $\rightarrow W = V$ oder $W = \{0\}$

- $\pi : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ irreduzible komplex-lineare Darstellung

  $W \subset V$ $\mathfrak{g}$-invariant $\rightarrow$ invariant unter $\pi(X+iY) = \pi(X) + i\,\pi(Y)$

  $\rightarrow$ $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-invariant

  $\rightarrow$ $W = V$ oder $W = \{0\}$

Beispiel: $SU(2)$-Darstellung V_m = Menge der homogenen Polynome in zwei komplexen Variablen z_1, z_2 vom Grad m

mit $\quad (g \cdot P)(z) = P(g^{-1} z) \qquad z = \binom{z_1}{z_2},\ g \in SU$

$\rightsquigarrow$ $\mathfrak{su}(2)$-Darstellung $\qquad \pi_m : SU(2) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{m+1})$

$\qquad d\pi_m : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m+1})$

mit: $\quad d\pi_m(X) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi_m(\exp tX)$

$$\rightarrow (d\pi_m(X)P)(z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P(\exp -tX \cdot z)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z_1} \cdot \dot z_1 + \frac{\partial P}{\partial z_2} \cdot \dot z_2 \qquad \text{(Kettenregel)}$$

wobei: $\quad z(t) = (z_1(t), z_2(t)) = \exp -tX \cdot z$

$$= e^{-tX} \cdot z \qquad z = \binom{z_1}{z_2}$$

$$\Rightarrow \dot z(0) = -X \cdot z \qquad X \in \mathfrak{su}(2)$$

$$\Rightarrow \quad (d\pi(X)P)(z) = -\frac{\partial P}{\partial z_1} \cdot (X_{11} z_1 + X_{12} z_2) - \frac{\partial P}{\partial z_2} (X_{21} z_1 + X_{22} z_2) \qquad (*)$$

Bemerkung: Die Darstellung $d\pi$ von $su(2)$ setzt sich fort zu einer Darstellung $d\pi$ von $sl(2,\mathbb{C}) = su(2)^{\mathbb{C}}$.

Basis in $sl(2,\mathbb{C})$: $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

mit: $[H, X] = 2Y$, $[H, Y] = -2Y$, $[X, Y] = H$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad d\pi(H) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$d\pi(X) = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \qquad d\pi(Y) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$\Rightarrow \quad d\pi(H)\, z_1^k z_2^{m-k} = (m-2k)\, z_1^k z_2^{m-k}$$

$$d\pi(X)\, z_1^k z_2^{m-k} = -k\, z_1^{k-1} z_2^{m-k+1}$$

$$d\pi(Y)\, z_1^k z_2^{m-k} = (k-m)\, z_1^{k+1} z_2^{m-k+1}$$

Bemerkung: $X = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A_t + i B_t)$, $\quad Y = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A_t - i B_t)$

Bemerkung:
- Die irreduziblen Darstellungen von $su(2)$ stehen in 1:1-Beziehung zu irreduziblen $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellungen
- Sei V ein komplexer Vektorraum, $A, B, C \in \mathrm{End}(V)$ mit

  $[A, B] = 2B$, $\quad [A, C] = -2C$, $\quad [B, C] = A$

  dann existiert eine $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung $\pi : sl(2,\mathbb{C}) \to gl(V)$ definiert durch: !

  $$\pi(H) = A, \quad \pi(X) = B, \quad \pi(Y) = C$$

Struktur der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Darstellungen

Sei V eine $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Darstellung

Bezeichnungen: • $V_\lambda = \{ v \in V \mid H.v = \lambda v \}$ Gewichtsraum zum Gewicht λ

• $v \in V_\lambda$: Gewichtsvektor zum Gewicht λ

Lemma: Sei $v \in V_\lambda$ dann folgt: $Xv \in V_{\lambda+2}$, $Yv \in V_{\lambda-2}$

Beweis: • $H \cdot Xv = [H,X]v + X \cdot Hv = 2Xv + \lambda Xv = (2+\lambda)Xv$

• analog für Yv

Bemerkung: H ist diagonalisierbar, X, Y sind nilpotent (da $\dim V < \infty$

Bezeichnung: • $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$, $X.v = 0$ heißt primitiv (maximaler Gewichtsvektor)

Satz: Sei V eine ~~irreduzible~~ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Darstellung, sei $v_0 \in V_\lambda$ ein maximaler Gewichtsvektor, man setzt:

$$v_{-1} = 0, \quad v_k = \frac{1}{k!} Y^k . v_0 \qquad k = 0, 1, \ldots$$

dann folgt:

$$H v_k = (\lambda - 2k) v_k, \quad X v_k = (\lambda - k + 1) v_{k-1}, \quad Y v_k = (k+1) v_{k+1}$$

Beweis: Die Formel für H folgt aus dem Lemma. Die Formel für Y folgt aus der Definition

$$\begin{aligned}
k \cdot X \cdot v_k &= X \cdot Y \cdot v_{k-1} = [X,Y] v_{k-1} + YX v_{k-1} \\
&= H v_{k-1} + YX v_{k-1} \\
&= (\lambda - 2(k-1)) v_{k-1} + (\lambda - k + 2) Y v_{k-2} \qquad \text{(nach Induktion)} \\
&= (\lambda - 2k + 2) v_{k-1} + (k-1)(\lambda - k + 2) v_{k-1} \\
&= k \cdot (\lambda - k + 1) v_{k-1}
\end{aligned}$$

<u>Bemerkungen</u>:

- Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$ dann sind die Vektoren $v_0, \dots, v_m$ linear unabhängig

  <u>da</u> H-Eigenwerte der v_i sind paarweise verschieden

- $W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(v_0, \dots, v_m)$ ist eine $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung, dh. ein $sl(2,\mathbb{C})$-invarianter Unterraum von V.

  W ist isomorph zu $V_m = \mathrm{Sym}^m \mathbb{C}$

  <u>da</u> $z_1^k z_2^{m-k} \mapsto v_k$, mit gleicher Wirkung von H, X, Y

- Die H-Eigenwerte sind ganzzahlig, $\lambda = m$

  <u>da</u> $v_{m+1} = 0 \Rightarrow 0 = X v_{m+1} = (\lambda - m) v_m$, $v_m \neq 0$

- In jeder endlich-dimensionalen $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung existiert ein maximaler Gewichtsvektor

  <u>da</u> $\exists$ $v \in V$. $Hv = \lambda v$ $\rightarrow$ $v, Xv, X^2 v, \dots$ sind linear unabhängige Gewichtsvektoren
  $\rightarrow \exists\ k: X^k v \neq 0,\ X^{k+1} v = 0$

- Das Gewicht $\lambda = m$ des maximalen Gewichtsvektors v_0 heißt <u>höchstes Gewicht</u> von V

- Ist V irreduzibel folgt $V = W$, $\lambda = \dim V - 1$, bis auf skalare Vielfache existiert genau ein maximaler Gewichtsvektor v_0.

<u>Satz</u>: Sei V eine irreduzible $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung. Dann ist V eine direkte Summe von Gewichtsräumen.

$$V = V_m \oplus V_{m-2} \oplus \dots \oplus V_{-m} \qquad \text{wobei} \quad m = \dim V - 1$$

Es existiert ein bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmter maximaler Gewichtsvektor zum höchsten Gewicht m

Die $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung ist explizit auf der Basis $\{v_i\}$ gegeben, $V \cong \mathrm{Sym}^m \mathbb{C}^2$, d.h. in jeder Dimension existiert bis auf Isomorphie genau eine irreduzible $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung.

Lefschetz - Zerlegung

Sei V eine beliebige $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ - Darstellung

man definiert: $PV := \ker X$

$\Rightarrow V = PV \oplus YPV \oplus Y^2 PV \oplus \ldots$

H erhält diese Aufspaltung, H hat nur ganzzahlige Eigenwerte

da • $Xv = 0 \rightarrow HXv = [H,X]v + XHv = 2Xv + XHv \rightarrow XHv = 0$ dh. $Hv \in P$

• $Xv = 0 \rightarrow HYv = [H,Y]v + YHv = -2Yv + YHv$ dh. $HYv \in YPV$

• weiter induktiv, es folgt, dass H alle Summanden erhält

Satz: Sei V_k der H-Eigenraum zum Eigenwert k, dann gilt

① $\ker X \cap V_k = \ker (Y^{k+1} : V_k \longrightarrow V_{-k-2})$

② $Y^k : V_k \longrightarrow V_{-k}$, $X^k : V_{-k} \rightarrow V_k$ sind Isomorphismen

Anwendung: (M^{2n}, g, J) kompakte Kähler-Mfk., $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$

$L := \omega \wedge$, $\Lambda = \omega \lrcorner$, $h = (n-p)$ auf Λ^p

$[\Lambda, L] = h$, $[h, L] = -2L$, $[h, \Lambda] = 2\Lambda$

dh. $X \leftrightarrow \Lambda$, $Y \leftrightarrow L$, $H \leftrightarrow h$

L, Λ, h kommutieren mit $\Delta \Rightarrow$ man erhält eine $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Darstellung auf $\ker \Delta \cong H^*(M)$

$\Rightarrow$ Hard-Lefschetz-Theorem: • $L^k : H^{n-k}(M) \longrightarrow H^{n+k}(M)$ ist ein Isomorphismus

• $P^{n-k}(M) := \ker (L^{k+1} : H^{n-k} \rightarrow H^{n+k+2})$
$= \ker(\Lambda) \cap H^{n-k}(M)$ primitive Kohomologie

$\rightarrow H^m(M) = \bigoplus_k L^k P^{m-2k}(M)$