# Darstellungen von $SU(3)$

Die Gruppe $SU(3)$ ist kompakt und einfach-zusammenhängend

$\rightarrow$
- Es existiert eine bijektive Beziehung zwischen endlich-dimensionalen komplexen $SU(3)$-Darstellungen und endlich-dimensionalen komplexen $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung. Dabei entsprechen irreduzible $SU(3)$-Darstellungen genau den irreduziblen $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellungen
- Jede endlich-dimensionale $SU(3)$- oder $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung ist eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen

ab jetzt: Beschreibung von $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellungen

(komplex + endlich-dim.)

Basis in $sl(3,\mathbb{C})$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $\mathrm{span}\{H_1, X_1, Y_1\}$, $\mathrm{span}\{H_2, X_2, Y_2\}$ sind Unteralgebren von $sl(3,\mathbb{C})$ isomorph zu $sl(2,\mathbb{C})$

da: $[H_1, X_1] = 2X_1$, $[H_1, Y_1] = -2Y_1$, $[X_1, Y_1] = H_1$

$[H_2, X_2] = 2X_2$, $[H_2, Y_2] = -2Y_2$, $[X_2, Y_2] = H_2$

Bemerkung: $\mathrm{span}\{H_1, H_2\}$ ist eine abelsche Unteralgebra

da: $[H_1, H_2] = 0$

# Kommutatorrelationen in $sl(3,\mathbb{C})$

| | $H_1$ | $H_2$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_1$ | $0$ | $0$ | $2X_1$ | $-X_2$ | $X_3$ | $-2Y_1$ | $Y_2$ | $-Y_3$ |
| $H_2$ | | $0$ | $-X_1$ | $2X_2$ | $X_3$ | $Y_1$ | $-2Y_2$ | $-Y_3$ |
| $X_1$ | | | $0$ | $X_3$ | $0$ | $H_1$ | $0$ | $-Y_2$ |
| $X_2$ | | | | $0$ | $0$ | $0$ | $H_2$ | $Y_1$ |
| $X_3$ | | | | | $0$ | $-X_2$ | $X_1$ | $H_1+H_2$ |
| $Y_1$ | | | | | | $0$ | $-Y_3$ | $0$ |
| $Y_2$ | | | | | | | $0$ | $0$ |
| $Y_3$ | | | | | | | | $0$ |

<u>wobei:</u> $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sei $(\pi, V)$ eine $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellung (komplex, endlich-dim.)

<u>Bezeichnungen</u>:

- <u>Gewicht</u> von $\pi$: $\mu = (m_1, m_2) \in \mathbb{C}^2$ mit
$$\begin{aligned} \pi(H_1)v &= m_1 v \\ \pi(H_2)v &= m_2 v \end{aligned} \qquad (*)$$
für ein $v \in V$ mit $v \neq 0$
- <u>Gewichtsvektor</u> zum Gewicht $\mu$: $v \in V$ mit $(*)$
- <u>Gewichtsraum</u> zum Gewicht $\mu$ = Menge aller Gewichtsvektoren und die Null
- <u>Vielfachheit</u> eines Gewichtes = Dimension des Gewichtsraumes

<u>Bemerkung</u>:

- Gewichte sind Paare simultaner Eigenwerte für $\pi(H_1)$ und $\pi(H_2)$
- Isomorphe Darstellungen haben gleiche Gewichte und Vielfachheiten

<u>Satz</u>: Jede $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellung hat wenigstens ein Gewicht.

<u>Beweis</u>:

- $\pi(H_1)$ hat wenigstens einen Eigenwert $m_1$
- $[H_1, H_2] = 0 \;\rightarrow\; \pi(H_2)$ erhält den Eigenraum $ER_{\pi(H_1)}(m_1)$
$\rightarrow\; \pi(H_2)|_{ER_{\pi(H_1)}(m_1)}$ hat einen Eigenwert $m_2$

<u>Satz</u>: Die Gewichte einer $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellung haben die Form $\mu = (m_1, m_2)$ mit ganzen Zahlen $m_1, m_2$.

<u>Beweis</u>:

- man betrachtet die $sl(2,\mathbb{C})$ – Darstellungen von $\mathrm{span}\{H_1, X_1, Y_1\}$ und $\mathrm{span}\{H_2, X_2, Y_2\}$, die man durch Einschränkung erhält
- Gewichte von $sl(2,\mathbb{C})$ – Darstellungen sind ganzzahlig

**Definition:** Die von Null verschiedenen Gewichte der adjungierten Darstellung von $sl(3,\mathbb{C})$ nennt man Wurzeln von $sl(3,\mathbb{C})$, d.h.

$$\alpha = (a_1, a_2) \quad \text{mit} \quad [H_1, Z] = a_1 Z \,, \quad [H_2, Z] = a_2 Z$$

$\Rightarrow$ Wurzeln von $sl(3,\mathbb{C})$: $\alpha = (2,-1), (-1,2), (1,1), (-2,1), (1,-2), (-1,-1)$

Wurzelvektoren: $Z = X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$

**Bemerkung:** Die Wurzeln bilden das "Wurzelsystem" $A_2$

**Definition:** Einfache Wurzeln sind Wurzeln mit der Eigenschaft, dass jede andere Wurzel als Linearkombination dieser Wurzeln dargestellt werden kann, sodass die Koeffizienten ganzzahlig und entweder alle positiv oder alle negativ sind

$\Rightarrow$ einfache Wurzeln von $sl(3,\mathbb{C})$: $\alpha_1 = (2,-1)$, $\alpha_2 = (-1,2)$

da: $(1,1) = \alpha_1 + \alpha_2$, $(-1,-1) = -\alpha_1 - \alpha_2$ usw.

**Bemerkung:** Die einfachen Wurzeln sind nicht eindeutig bestimmt. Die Wahl der einfachen Wurzeln teilt die Wurzeln in positive und negative.

**Lemma:** Sei $\alpha = (a_1, a_2)$ eine Wurzel von $sl(3,\mathbb{C})$ mit Wurzelvektor $Z_\alpha$, sei $\pi$ eine $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellung mit Gewicht $\mu = (m_1, m_2)$ und Gewichtsvektor $v$. Dann gilt:

$$H_1 Z_\alpha v = (m_1 + a_1) Z_\alpha v$$

$$H_2 Z_\alpha v = (m_2 + a_2) Z_\alpha v$$

D.h. $Z_\alpha v = 0$ oder ein neuer Gewichtsvektor zum Gewicht:

$$\mu + \alpha = (m_1 + a_1, m_2 + a_2)$$

Beweis: Kommutatorrelationen

<u>Definition</u>: Seien $\mu_1, \mu_2$ Gewichte, dann heißt $\mu_1$ <u>höher</u> als $\mu_2$ falls:

$\mu_1 \succ \mu_2$

$$\mu_1 - \mu_2 = a\,\alpha_1 + b\,\alpha_2 \quad \text{mit} \quad a, b \geq 0$$

reell!

Ein Gewicht $\mu_0$ heißt <u>höchstes Gewicht</u> (einer Darstellung $\pi$), falls $\mu_0$ höher als alle anderen Gewichte ist.

<u>Bemerkung</u>:
- Die Relation $\succ$ ist eine Halbordnung (partial ordering), dh. es muß nicht immer $\mu_1 \succ \mu_2$ oder $\mu_1 \prec \mu_2$ gelten
- Die Relation $\succ$ hängt ab von der Wahl der einfachen Wurzeln

<u>Satz</u>: ① Jede irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung ist direkte Summe ihrer Gewichtsräume

dh. $\pi(H_1), \pi(H_2)$ sind simultan diagonalisierbar

② Jede irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung hat ein eindeutig bestimmtes höchstes Gewicht.

Zwei isomorphe irreduzible Darstellungen haben das gleiche höchste Gewicht

③ Zwei irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellungen mit dem gleichen höchsten Gewicht sind isomorph

④ Höchste Gewichte irreduzibler $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellungen sind von der Form

$$\mu_0 = (m_1, m_2) \quad \text{mit} \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}$$

⑤ Zu jedem Paar $(m_1, m_2)$ natürlicher Zahlen existiert eine irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung mit höchstem Gewicht

$$\mu_0 = (m_1, m_2)$$

<u>Bemerkung</u>:
- Irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellungen sind bis auf Isomorphie durch ihr höchstes Gewicht festgelegt.
- Z.B. läßt sich die Dimension der irreduziblen Darstellung $V_{\mu_0}$ mit höchstem Gewicht $\mu_0 = (m_1, m_2)$ berechnen:

$$\dim V_{\mu_0} = \frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)$$

**Beweis:** zu 1  Sei $W$ die Summe aller Gewichtsräume in $V$

$\rightarrow$ • $W \neq \{0\}$

• $W$ ist $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$-invariant  da  $v$ Gewichtsvektor $\rightarrow Z_\alpha v$, $H_i v$ " – " $Z_\alpha$ Wurzelvektoren

$\rightarrow W = V$

**Satz:** Sei $(\pi, V)$ eine $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$-Darstellung, für die ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ existiert mit:

1. $v$ ist Gewichtsvektor zum Gewicht $\mu_0 = (m_1, m_2)$
2. $X_1 v = X_2 v = 0$  $(\rightarrow X_3 v = 0)$
3. $V$ ist der kleinste invariante Unterraum, der $v$ enthält.

$(*)$

Dann ist $\mu_0$ das höchste Gewicht von $\pi$.
Der Gewichtsraum zum Gewicht $\mu_0$ ist eindimensional.

**Beweis:** **Lemma:** Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra mit einer Basis $X_1, \ldots, X_m$ und sei $\pi$ eine $\mathfrak{g}$-Darstellung. Dann ist jeder Ausdruck der Form

$$\pi(X_{i_1}) \cdots \pi(X_{i_N})$$

Linearkombination von Termen der Form

$$\pi(X_m)^{k_m} \cdot \ldots \cdot \pi(X_1)^{k_1}$$

mit $k_1 + \ldots + k_m \leq N$, $k_i \geq 0$.

Beweis des Lemmas: Induktion nach $N$ + Kommutatorrelationen

• $\rightarrow W := \operatorname{span}\{\pi(Y_{i_1}) \cdots \pi(Y_{i_n}) v\}$  $v \in V$ mit $(*)$, $i_\ell \in \{1,2,3\}$, $n \geq 0$

ist $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$-invariant.  $v \in W$ !

da • Basis: $X_1, X_2, X_3, H_1, H_2, Y_1, Y_2, Y_3$  (wie im Lemma)
• $X_i v = 0$  $i = 1,2,3$,  $H_j v = m_j v$  $j = 1,2$

$\pi(X_3)v = \pi([X_1, X_2])v = (\pi(X_1)\pi(X_2) - \pi(X_2)\pi(X_1))v = 0$

• $w = \pi(Y_{i_1}) \cdots \pi(Y_{i_n}) v$

$\rightarrow$ $w$ ist Gewichtsvektor zum Gewicht $\mu_0 - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2$ oder Null

(↗ Lemma S. 35)

da $Y_1$ ist Wurzelvektor zu $-\alpha_1$
$Y_2$ " – " $-\alpha_2$
$Y_3$ " – " $-\alpha$ ...

$\Rightarrow$ $V = W$ ist aufgespannt von Gewichtsvektoren zu Gewichten $\mu$ mit $\mu \prec \mu_0$

$\rightarrow$ $\mu_0$ ist höchstes Gewicht von $V$

! • Der einzige Vektor der Form $\pi(Y_{i_1}) \cdots \pi(Y_{i_n})v$ zum Gewicht $\mu_0$ ist $v$

$\Rightarrow$ der Gewichtsraum zum Gewicht $\mu_0$ ist ein-dimensional

Satz: Jede irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung $(\pi, V)$ hat einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ mit $(*)$. und ein eindeutig bestimmtes höchstes Gewicht $\mu_0$

Beweis: $V$ ist direkte Summe von Gewichtsräumen, $\dim V < \infty$

$\Rightarrow$ es existiert ein Gewicht $\mu_0$, so dass kein Gewicht $\mu$ existiert mit $\mu \succ \mu_0$ (damit ist $\mu_0$ noch nicht höchstes Gewicht!)

$\rightarrow$ $\pi(X_1)v = \pi(X_2)v = 0$ für jeden Gewichtsvektor zum Gewicht $\mu_0$

da zB $\pi(X_1)v$ ist Gewichtsvektor zum Gewicht $\mu_0 + \alpha_1 \succ \mu_0$

$\rightarrow$ $v$ ist ein Vektor mit $(*)$ (③ gilt, da $V$ irreduzibel)

Eindeutigkeit: • $\mu_0$ ist höchstes Gewicht (nach vorigem Satz)
• zwei verschiedene Gewichte können nicht beide höchste sein

Satz: Eine $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung mit einem Vektor, der $(*)$ erfüllt ist irreduzibel.

Beweis: $(\pi, V)$ $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung, $v \in V$ mit $(*)$

$V = \bigoplus_i V_i$, $V_i$ : irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung

Jedes $V_i$ ist eine Summe von Gewichtsräumen, $\mu_0$ ist ein Gewicht von $V$

$\Rightarrow$ $\mu_0$ ist ein Gewicht von einer Darstellung $V_{i_0}$ da $(**)$

$\rightarrow$ $v \in V_{i_0}$ da der Gewichtsraum zum Gewicht $\mu_0$ ist ein-dimensional

$\rightarrow$ $V = V_{i_0}$ da $V_{i_0}$ invariant ist und $v$ ~~erfüllt~~ + ③ in $(*)$

$\rightarrow$ $V$ ist irreduzibel

<u>Satz</u>: Zwei irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellungen mit dem gleichen höchsten Gewicht sind isomorph.

<u>Beweis</u>: schon gezeigt: $(\pi, V)$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\exists$ Vektor $v \in V$ mit $(*)$

$(\pi, V)$, $(\sigma, W)$ seien irreduzible Darstellungen mit höchstem Gewicht $\mu_0$

$v \in V$, $w \in W$ seien (maximale) Vektoren mit $(*)$

- $U \subset V \oplus W$ sei der kleinste invariante Unterraum, der $v + w$ enthält

$U$ ist wieder eine Darstellung mit $(*)$

$\rightarrow$ $U$ ist irreduzibel

- <u>Projektionen</u>: $P_V(v+w) = v$, $P_W(v+w) = w$

$P_V : V \oplus W \rightarrow V$ $\qquad$ $P_W : V \oplus W \rightarrow W$

$P_V$, $P_W$ sind $sl(3,\mathbb{C})$ – äquivariant

$\rightarrow$ $P_V|_U$, $P_W|_U$ " – " , $P_V|_U \neq 0$, $P_W|_U \neq 0$

$\rightarrow$ $U \cong V$, $U \cong W$ $\qquad$ Lemma von Schur

$\rightarrow$ $V \cong W$

<u>Satz</u>: Sei $\pi$ eine irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellung. Dann ist das höchste Gewicht von der Form:

$$\mu = (m_1, m_2) \quad \text{mit} \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N} \, .$$

<u>Beweis</u>: schon gezeigt: alle Gewichte sind von der Form $(m_1, m_2)$ mit $m_i \in \mathbb{Z}$.

$v$ sei Gewichtsvektor zum höchsten Gewicht $\mu_0 = (m_1, m_2)$

$\rightarrow$ $\pi(X_1)v = \pi(X_2)v = 0$

$\rightarrow$ $v$ ist höchster Gewichtsvektor für die $sl(2,\mathbb{C})$ – Darstellungen

$$\pi|_{\mathrm{span}\{H_1, X_1, Y_1\}} \quad \text{und} \quad \pi|_{\mathrm{span}\{H_2, X_2, Y_2\}}$$

$\rightarrow$ $m_1 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $m_2 \geq 0$