zu (5): **Satz:** Zu jedem Paar $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ existiert eine irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung mit höchstem Gewicht $\mu_0 = (m_1, m_2)$.

Beispiele: • Standard-Darstellung $V = \mathbb{C}^3$

(v_1, v_2, v_3) sei die kanonische Basis

$\Rightarrow$ Gewichtsvektoren: v_1 $\quad$ v_2 $\quad$ v_3

$$H_1 v_1 = v_1 \qquad H_1 v_2 = -v_2 \qquad H_1 v_3 = 0$$
$$H_2 v_1 = 0 \qquad H_2 v_2 = v_2 \qquad H_2 v_3 = -v_3$$

Gewichte: $(1,0)$ $\quad$ $(-1,1)$ $\quad$ $(0,-1)$

$\Rightarrow$ Die Standard-Darstellung hat das höchste Gewicht: $\mu = (1,0)$

Lemma: Seien μ_i die Gewichte von V, dann sind $-\mu_i$ die Gewichte der konjugierten bzw. dualen Darstellung

Beweis: • in V^* bzw. $\bar{V}$ wirkt $Z \in sl(3,\mathbb{C})$ als $-Z^{tr}$ bzw $\bar{Z}$

• die Konjugation auf $sl(3,\mathbb{C})$ ist definiert als $\bar{Z} = -Z^{tr}$

da $sl(3,\mathbb{C}) = su(3) \oplus i\, su(3)$,
$X, Y \in su(3)$: $\pi_{\bar{V}}(X+iY)v = \pi_{\bar{V}}(X)v + i\,\pi_{\bar{V}}(Y)v$
$$= \bar{X}\cdot v + i\,\bar{Y}v$$
$$= -X^{tr}v - i\,Y^{tr}v = -(X+iY)^{tr}\cdot v$$

$\Rightarrow$ Die zur Standard-Darstellung duale bzw. konjugierte Darstellung hat das höchste Gewicht $\mu = (0,1)$

Gewichtsvektoren: v_1 $\quad$ v_2 $\quad$ v_3

Gewichte: $(-1,0)$ $\quad$ $(1,-1)$ $\quad$ $(0,1)$

Beispiel: Die adjungierte Darstellung hat höchstes Gewicht $(1,1)$

Gewichtsvektor:	H_1	H_2	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
Gewicht:	$(0,0)$	$(0,0)$	$(2,-1)$	$(-1,2)$	$(1,1)$	$(-2,1)$	$(1,-2)$	$(-1,-1)$

$\uparrow$ höchstes Gewicht

$\widehat{=}$ Wurzelvektoren, Wurzeln

<u>Beweis des Satzes</u>: Sei E die Standard-Darstellung und $\bar{E} \cong E^*$ die konjugierte bzw. duale Darstellung

man betrachtet: $V = \underbrace{E \otimes \ldots \otimes E}_{m_1\text{-mal}} \otimes \underbrace{\bar{E} \otimes \ldots \otimes \bar{E}}_{m_2\text{-mal}}$

$v_{m_1,m_2} = v_1 \otimes \ldots \otimes v_1 \otimes v_3 \otimes \ldots \otimes v_3$ ($\{v_i\} \subset \mathbb{C}^3$ Standard-Basis)

$\Rightarrow$ $H_1 v_{m_1,m_2} = m_1 v_{m_1,m_2}$ $\qquad H_1 v_1 = v_1,\ H_1 v_3 = 0$ in E

$H_2 v_{m_1,m_2} = m_2 v_{m_1,m_2}$ $\qquad H_2 v_1 = 0,\ H_2 v_3 = v_3$ in $\bar{E}$

$X_i v_{m_1,m_2} = 0$ für $i = 1,2,3$

Sei W der kleinste $sl(3,\mathbb{C})$-invariante Unterraum von V, der v_{m_1,m_2} enthält (i.A. $W \neq V$, irreduzibel nur für $(1,0)$ und $(0,1)$)

$\rightarrow$ W ist eine irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung mit dem höchsten Gewicht $\mu_0 = (m_1,m_2)$ (da (W, v_{m_1,m_2}) die Eigenschaft (*) hat)

(*) <u>Lemma</u>: Seien V, W Darstellungen mit höchsten Gewichten: α, β und entsprechenden Gewichtsvektoren $v \in V, w \in W$, dann ist $v \otimes w$ höchster Gewichtsvektor in $V \otimes W$ zum Gewicht $\alpha + \beta$ und $v \cdot \ldots \cdot v \in \mathrm{Sym}^n V$ ist höchster Gewichtsvektor in $\mathrm{Sym}^n V$ zum Gewicht $n \cdot \alpha$.

$\{v_i\}$ kanonische Bas.

<u>Beispiel</u>: $\mathrm{Sym}^n E$

<u>Gewichtsvektoren</u>: $v_{a,b,c} = v_1^a v_2^b v_3^c$, $a+b+c = n$

<u>Gewichte</u>: $H_1 v_{a,b,c} = (a-b)\, v_{a,b,c}$, $\left(H_1 : \begin{smallmatrix} v_1 \mapsto v_1 \\ v_2 \mapsto -v_2 \\ v_3 \mapsto 0 \end{smallmatrix}\right)$

$H_2 v_{a,b,c} = (b-c)\, v_{a,b,c}$ $\left(H_2 : \begin{smallmatrix} v_1 \mapsto 0 \\ v_2 \mapsto v_2 \\ v_3 \mapsto -v_3 \end{smallmatrix}\right)$

$X_1 v_{a,b,c} = b\, v_{a+1,b-1,c}$ $\qquad X_1 : v_2 \mapsto v_1$ sonst Null

$X_2 v_{a,b,c} = c\, v_{a+1,b,c-1}$ $\qquad X_2 : v_3 \mapsto v_1$ sonst Null

$\Rightarrow$ $v_{n,0,0} = v_1^n$ ist höchster Gewichtsvektor zum höchsten Gewicht $(n,0)$

<u>zu (*)</u>: sind $v_i \in V$, $w_j \in W$ Gewichtsvektoren in V bzw W mit Gewichten α_i bzw β_j dann sind $v_i \otimes w_j$ Gewichtsvektoren in $V \otimes W$ mit Gewichten $\alpha_i + \beta_j$!

Explizite Konstruktion der Darstellungen $V_{(a,b)}$

($\nearrow$ Fulton, Harris)

Sei $V_{(a,b)}$ die irreduzible $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$-Darstellung mit dem höchsten Gewicht $\mu_0 = (a,b)$ $\qquad (a,b \in \mathbb{N})$

bis jetzt: $V_{(a,b)} \subset V_{(1,0)}^{\otimes a} \otimes V_{(0,1)}^{\otimes b} = E^{\otimes a} \otimes \bar{E}^{\otimes b}$ $\qquad (\bar{E} \cong E^*)$

Bezeichne $i_{a,b} : \mathrm{Sym}^a E \otimes \mathrm{Sym}^b E^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^{a-1} E \otimes \mathrm{Sym}^{b-1} E^*$

die Kontraktionsabbildung: $(v_1 \cdots v_a) \otimes (v_1^* \cdots v_b^*) \mapsto \sum_{i,j} v_j^*(v_i)(v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_a) \otimes (v_1^* \cdots \hat{v}_j^* \cdots v_b^*$

$\to V_{(a,b)} \subset \ker i_{a,b}$

da:
- $V_{(a,b)} \subset \mathrm{Sym}^a E \otimes \mathrm{Sym}^b E^*$ da: das Gewicht (a,b) kommt vor
- $V_{(a,b)} \not\subset \mathrm{Sym}^{a-1} E \otimes \mathrm{Sym}^{b-1} E^*$ da das Gewicht (a,b) kommt nicht vor

Gewichte von $\mathrm{Sym}^{a-1} E \otimes \mathrm{Sym}^{b-1} E^*$: $(k-\ell, \ell-m) - (r-s, s-t)$
mit: $k+\ell+m = a-1$, $r+s+t = b-1$ $\quad (*)$

(a,b) kommt als Gewicht vor $\Leftrightarrow$ $k-\ell-r+s = a$, $\ell-m-s+t = b$ $\quad (**)$

$(*)-(**) \Rightarrow 2\ell + r + m - s = -1$, $r + 2s + m - \ell = -1$
$\Rightarrow \ell + 2r + 2m + s = -2$, $\lightning$

Satz: ① $V_{(a,b)} = \ker i_{a,b}$

② $\mathrm{Sym}^a E \otimes \mathrm{Sym}^b E^* = \bigoplus_{i=0}^{b} V_{(a-i,b-i)}$ $\qquad , a \geq b$

Beweis: später

Bemerkung: ① und ② sind äquivalent