Die Weyl-Gruppe

Bemerkung: Man hat eine $SU(3)$-Wirkung auf den $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellungen

$$\pi_A(X) := \pi(AXA^{-1}) \qquad \text{für } A \in SU(3)$$

Es gilt $\pi_A \cong \pi$. Interessant sind nun $SU(3)$-Symmetrien, die den von H_1, H_2 aufgespannten Raum erhalten

Definition: • Die Cartan-Unteralgebra von $sl(3,\mathbb{C})$ ist definiert als:

$$\mathfrak{h} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{H_1, H_2\} \qquad \text{abelsche Unteralgebra}$$

• $Z = \{ A \in SU(3) \mid Ad_A(H) = H \quad \forall H \in \mathfrak{h} \}$

$N = \{ A \in SU(3) \mid Ad_A(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h} \}$

Bemerkung: Z, N sind Untergruppen von $SU(3)$, $Z \subset N$ Normalteiler.

Definition. Die Weyl-Gruppe von $SU(3)$ ist definiert als

$$W = N / Z$$

Wirkung der Weyl-Gruppe auf $\mathfrak{h}$: $\quad w \cdot H = Ad_A(H)$

für $w = AZ$, $H \in \mathfrak{h}$, $A \in N$

$\Rightarrow \quad W = \{ Ad_A \in \operatorname{End}(\mathfrak{h}) \mid A \in N \}$

Satz: ① $Z = \operatorname{diag}(e^{i\theta}, e^{i\varphi}, e^{-i(\theta+\varphi)})$

② $N = \{ A \in SU(3) \mid A e_k = e^{i\theta_k} e_{\sigma(k)}, \ \sigma \in S_3 \}$

③ $W \cong S_3$ $\qquad$ Insbesondere: $\# W = 6$

Ziel: Die Weyl-Gruppe definiert eine Symmetrie der Gewichte

Sei (π, V) eine $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung

$$v \in V \text{ mit } \left.\begin{aligned} H_1 v &= m_1 v \\ H_2 v &= m_2 v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Gewicht: } \mu = (m_1, m_2)$$

$$H = a H_1 + b H_2 \longrightarrow H v = (a m_1 + b m_2) v$$

dh. μ kann man auffassen als Linearform auf $\mathfrak{h}$ mit $\mu(H_1) = m_1$, $\mu(H_2) = m_2$

Definition: Sei $\mathfrak{h} = \operatorname{span}\{H_1, H_2\}$ die Cartan-Unteralgebra von $sl(3,\mathbb{C})$ und sei (π, V) eine $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung.

Ein Gewicht von π ist ein $\mu \in \mathfrak{h}^*$ mit

$$\pi(H) v = \mu(H) v \qquad \forall H \in \mathfrak{h} \qquad (\text{für ein } v \neq 0)$$

Der Vektor v heißt Gewichtsvektor zum Gewicht μ.

Bemerkung: Ein Gewicht $\mu \in \mathfrak{h}^*$ ist bestimmt durch seine Werte $\mu(H_1)$ und $\mu(H_2)$.

Wirkung der Weyl-Gruppe auf $\mathfrak{h}^*$: $\quad (w \cdot \mu)(H) = \mu(w^{-1} \cdot H)$

Satz: Sei (π, V) eine endlich-dimensionale $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung und sei $\mu \in \mathfrak{h}^*$ ein Gewicht von π. Dann ist für jedes $w \in W$ auch $w \cdot \mu$ wieder ein Gewicht von π mit der gleichen Vielfachheit wie μ. !

Beweis: Sei $\varrho: SU(3) \to \operatorname{Aut}(V)$ die Darstellung zu (π, V)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \pi(H)\varrho(A) v &= \varrho(A)\varrho(A)^{-1}\pi(H)\varrho(A) v \\ &= \varrho(A)\,\pi(A^{-1} H A) v \\ &= \mu(A^{-1} H A)\,\varrho(A) v \qquad \text{da } A \in N \end{aligned}$$

Sei $w = Az \in W$

$$\Rightarrow \quad (w \cdot \mu)(H) = \mu(w^{-1} H) = \mu(A^{-1} H A)$$

$\Rightarrow$ $\rho(A)\, v$ ist wieder ein Gewichtsvektor, zum Gewicht $w \cdot \mu$

weiter: $\rho(A) : V_\mu \longrightarrow V_{w \cdot \mu}$ $\qquad$ V_μ : Gewichtsraum zum Gewicht μ

ist ein Isomorphismus mit der Umkehrabbildung $\rho(A^{-1})$

Bemerkung: Die Wurzeln sind invariant unter der Wirkung der Weyl-Gruppe.

Identifikation $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$:

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$$
$$H_0 \longmapsto (H \mapsto \langle H_0, H \rangle)$$

wobei: $\langle A, B \rangle = tr(A^* B)$ $\qquad$ (W-invariant auf $\mathfrak{h}$!)

Gewichte können nun als Vektoren in $\mathfrak{h}$ betrachtet werden:

$$\pi(H)\, v = \langle \alpha, H \rangle\, v \qquad \underset{\alpha \in \mathfrak{h}}{\langle \alpha, H \rangle} = \underset{\alpha \in \mathfrak{h}^*}{\alpha(H)}$$

Beispiel: einfache Wurzeln $\alpha_1 = (2, -1)$, $\alpha_2 = (-1, 2)$

$\rightarrow$ als Vektoren in $\mathfrak{h}$:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = H_1, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = H_2$$

da $\alpha_1(H_1) = 2$
$\alpha_1(H_2) = -1$
$\alpha_2(H_1) = -1$
$\alpha_2(H_2) = 2$

Winkel, Längen: $|\alpha_1|^2 = 2$, $|\alpha_2|^2 = 2$, $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$

$\rightarrow$ α_1, α_2 bilden einen $120°$-Winkel $\qquad$ ($\cos 120 = -1$)

Bemerkung: $\alpha_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 - \lambda_2$, $\quad \alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
$\alpha_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_2 - \lambda_3$, $\quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$

<u>Bemerkung</u>: $\mathfrak{h} \cong \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0 \}$

$= \operatorname{span}\{H_1, H_2\}$ (eigentlich in $\mathbb{R}^3$)

<u>fundamentale Gewichte</u>: $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{h}$

mit: $\langle \mu_1, H_1 \rangle = 1 \qquad \langle \mu_2, H_1 \rangle = 0$

$\langle \mu_1, H_2 \rangle = 0 \qquad \langle \mu_2, H_2 \rangle = 1$

<u>Bemerkung</u>: Ein Gewicht μ ist <u>dominant-integral</u>, falls es als höchstes Gewicht einer irreduziblen $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellung

$\Rightarrow \mu(H_1), \ \mu(H_2) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mu = a\,\mu_1 + b\,\mu_2$ mit $a, b \in \mathbb{N}$

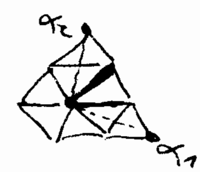
<u>Lemma</u>:

- $$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \tfrac{2}{3}\alpha_1 + \tfrac{1}{3}\alpha_2 \\ \mu_2 &= \tfrac{1}{3}\alpha_1 + \tfrac{2}{3}\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &= \operatorname{diag}\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

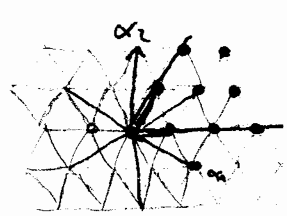
$\alpha_1 \perp \mu_2$

$\alpha_2 \perp \mu_1$

- $$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\mu_1 - \mu_2 \\ \alpha_2 &= -\mu_1 + 2\mu_2 \end{aligned}\right\}$$



- μ_1, μ_2 haben die Länge $\sqrt{6}/3$ und bilden einen Winkel von $60°$



Die Punkte • entsprechen den dominant integralen Gewichten

Wirkung der Weyl-Gruppe auf $\mathfrak{h}$

Elemente der Weyl-Gruppe: $w_1 = (1,2,3)$ $w_2 = (1,3,2)$, $w_0 = \mathrm{id}$

$w_3 = (1,2)$, $w_4 = (2,3)$, $w_5 = (3,1)$

$\alpha_1 = \mathrm{diag}(1,-1,0)$, $\alpha_2 = \mathrm{diag}(0,1,-1)$, $\alpha_1+\alpha_2 = \mathrm{diag}(1,0,-1)$

w_1: $\alpha_1 \mapsto \alpha_2$, $\alpha_2 \mapsto -\alpha_1-\alpha_2$ $\quad\hat{=}$ Drehung um $+120°$

w_2: $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2 \mapsto \alpha_1$ $\quad\hat{=}$ Drehung um $-120°$

w_3: $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$, $\alpha_2 \mapsto \alpha_1+\alpha_2$ $\quad\hat{=}$ Spiegelung an $\alpha_1^\perp = \mu_2$

w_4: $\alpha_1 \mapsto \alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2 \mapsto -\alpha_2$ $\quad\hat{=}$ Spiegelung an $\alpha_2^\perp = \mu_1$

w_5: $\alpha_1 \mapsto -\alpha_2$, $\alpha_2 \mapsto -\alpha_1$ $\quad\hat{=}$ Spiegelung an $(\alpha_1+\alpha_2)^\perp$

$\alpha_1+\alpha_2 \mapsto -(\alpha_1+\alpha_2)$

$\longrightarrow$ Die Weyl-Gruppe ist erzeugt von den Spiegelungen an den Wurzeln (von $sl(3,\mathbb{C})$).

hier: Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks

? **Bemerkung**: $w_1 = w_4 \circ w_3$