Gewichtsdiagramme von $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellungen

Ziel: Zerlegung von $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellungen in Gewichtsräume

Definition: Sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Die konvexe Hülle von $v_1, \dots, v_n$ ist die Menge aller Vektoren der Form:

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \qquad \text{mit: } \cdot\ c_1 + \dots + c_n = 1 \qquad \cdot\ c_i \geq 0$$

D.h. die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Teilmenge von V, die $v_1, \dots v_n$ enthält.

Satz: Sei (π, V) eine irreduzible $sl(3,\mathbb{C})$ – Darstellung mit höchstem Gewicht μ_0. Dann gilt:

μ ist Gewicht von π $\Leftrightarrow$ ① μ ist enthalten in der konvexen Hülle des Weyl-Orbits von μ_0

② $\mu_0 - \mu$ ist ganz-zahlige Linearkombination von α_1, α_2

$\Leftrightarrow$ μ und alle Weyl-Konjugierten $w \cdot \mu$ sind niedriger als μ_0

Bemerkung:
- Der Weyl-Orbit von μ_0 ist entweder ein 6-Eck oder ein Dreieck.
- Der zweite Fall tritt genau ein für $\mu = (m_1, 0)$ oder $\mu = (0, m_2)$, d.h. für die Darstellungen

$$\mathrm{Sym}^{m_1} E \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Sym}^{m_2} \overline{E}$$

- Die Gewichte in V_{μ_0} sind genau die ganzzahligen Punkte innerhalb (und auf dem Rand) der konvexen Hülle des Weyl-Orbits von μ_0, die kongruent zu μ_0 modulo $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ sind.

Lemma: Die Gewichte treten in ununterbrochenen Ketten auf:

$$\mu - r\alpha, \ldots, \mu, \ldots \quad \mu + q\alpha \quad ,$$

dabei ist μ ein Gewicht und α eine Wurzel.
Weiter gilt:

$$① \quad r - q = \frac{2 \langle \mu, H \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

$$② \quad \sigma_\alpha (\mu - r\alpha) = \mu + q\alpha$$

σ_α ist hier die Spiegelung an $\alpha^\perp$:

$$\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \frac{2\langle \mu, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \qquad \begin{array}{l} \sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha \\ \sigma_\alpha(\beta) = \beta, \beta \perp \alpha \end{array}$$

Beweis: zB $\alpha = H_1 \rightarrow$ man betrachtet die $s\ell(2,\mathbb{C})$ - Darstellung von $\text{span}\{H_1, X_1, Y_1\}$

- v sei Gewichtsvektor zum Gewicht μ

$$\Rightarrow \quad \ldots, Y_{\alpha_1}^2 v, Y_{\alpha_1} v, X_{\alpha_1} v, X_{\alpha_1}^2 v \ldots$$

sind Eigenvektoren von H_1 zu den Eigenwerten: $\ldots, \mu(H_1) - 2, \mu(H_1), \mu(H_1) + 2, \ldots$

aber: $\alpha_1(H_1) = 2$, d.h. man hat die EW $\ldots, \mu(H_1) - \alpha_1(H_1), \mu(H_1), \mu(H_1) + \alpha_1(H_1)$

- $\mu(H) - r\alpha(H) = -(\mu(H) + q\alpha(H))$ da: $s\ell_2\mathbb{C}$ - EW, $-k, \ldots k$

$$\Rightarrow r - q = 2 \cdot \frac{\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \qquad \text{für } H = H_\alpha \qquad \alpha(H_\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

- $$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\mu - r\alpha) &= \sigma_\alpha(\mu) + r\alpha \\ &= \sigma_\alpha(\mu) + (r-q)\alpha + q\alpha \\ &= \sigma_\alpha(\mu) + \frac{2\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha + q\alpha \\ &= \mu + q\alpha \end{aligned}$$

- Sei (π, V) eine $sl(3,\mathbb{C})$-Darstellung mit höchstem Gewicht μ_0 und höchstem Gewichtsvektor v

$\rightarrow$ • $X_\alpha v = 0$ für $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ $\qquad \alpha_3 := \alpha_1 + \alpha_2$

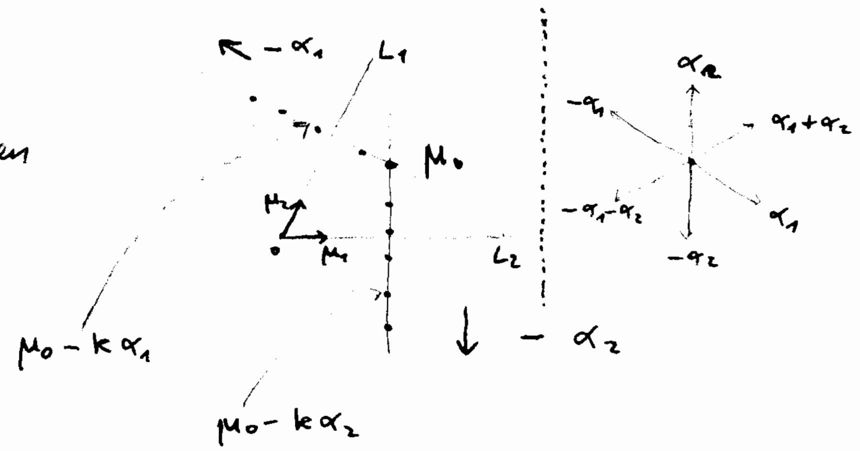
• jeder Gewichtsvektor ist von der Form $Y_{\alpha_{i_1}}^{j_1} \cdots Y_{\alpha_{i_k}}^{j_k} v$

• $\mu_0 = a\,\mu_1 + b\,\mu_2 \qquad a, b \in \mathbb{N}$

- alle Gewichte von V liegen im schraffierten Bereich

$=$ Gewicht $< \mu_0$

(unter der bzw. links von der gepunkteten Linie)



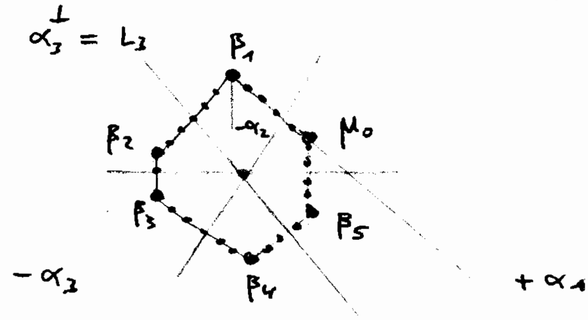
- die Gewichte gehen ununterbrochen bis zum Spiegelpunkt von μ_0 an $L_1 = \alpha_1^\perp$ bzw $L_2 = \alpha_2^\perp$: β_1

Sei v' ein Gewichtsvektor zum Gewicht β_1

$\rightarrow$ $Y_{\alpha_1} v' = 0$ nach Definition

$X_{\alpha_3} v' = 0$, $X_{\alpha_2} v' = 0$ da keine Gewichte über der gepunkteten Linie liegen
$\mu' = \beta_1 + \alpha_3 = \mu_0 - k\alpha_1 + \alpha_3$

β_1 ist höchstes Gewicht für die Wahl von einfachen Wurzeln: $-\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$



<u>Bemerkung</u>: Die Gewichtsräume auf der äußeren Schale haben alle Dimension 1

da isomorph zu V_{μ_0} und $\dim V_{\mu_0} = 1$

- Sei β_2 die Spiegelung von β_1 an $\alpha_3^\perp$, v'' Gewichtsvektor zu β_2

$\Rightarrow$ $Y_{\alpha_3} v'' = 0$

es gilt auch: $Y_{\alpha_1} v'' = 0$, $X_{\alpha_2} v'' = 0$

$\Rightarrow$ β_2 ist höchstes Gewicht für die Wahl von einfachen Wurzeln: $\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_1$

- Für jedes Gewicht α ist $\bigoplus_k V_{\alpha + k\alpha_i}$ eine $\quad i = 1,2,3$
$sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung, daher ist die Menge der k's mit $V_{\alpha+k\alpha_i} \neq \{0\}$ eine ununterbrochene Kette

$\Rightarrow$ Für jedes α in der äußeren Schale enthält diese Kette ein weiteres α' in der äußeren Schale

Bemerkung: Für das Beispiel hat man $V = V_{(2,1)}$, d.h.

$$\dim V_{(2,1)} = \frac{1}{2}\, 3 \cdot 2 \cdot 5 = 15$$

- Sei γ ein beliebiges Gewicht in V, dann liegt γ im Inneren der konvexen Hülle des Weyl-Orbits von μ_0, genau dann, wenn $\{\gamma + k\alpha_i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ für alle α_i aus mehr als γ besteht. Jede dieser Ketten enthält ein äußeres Gewicht.

Daher erhält man alle Gewichte, wenn man die Ketten ausgehend von den äußeren Gewichten betrachtet