Halbeinfache Lie-Algebren

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra. Ein <u>Ideal</u> in $\mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ mit:

$$[X, H] \in \mathfrak{h} \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, H \in \mathfrak{h}.$$

Bemerkung:
- Jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt die trivialen Ideale $\mathfrak{g}$ und $\{0\}$
- Ein Ideal ist ein invarianter Unterraum der adjungierten Darstellung.

Definition: Eine komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt <u>einfach</u>, falls $\mathfrak{g}$ nur triviale Ideale enthält und $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ gilt.

Eine komplexe Lie-Algebra heißt <u>halb-einfach</u>, falls sie direkte Summe einfacher Lie-Algebren ist.

Eine komplexe Lie-Algebra heißt <u>reduktiv</u>, falls sie direkte Summe einer halb-einfachen und einer abelschen Lie-Algebra ist.

Bemerkung:
- Nach dem Theorem von Ado besitzt jede komplexe Lie-Algebra eine treue Darstellung, kann also als Unteralgebra einer $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ betrachtet werden (alles endlich-dimensional)
- Das Zentrum einer halb-einfachen Lie-Algebra ist trivial und die adjungierte Darstellung ist treu.

Satz: Eine komplexe Lie-Algebra ist genau dann reduktiv, wenn die adjungierte Darstellung vollständig reducibel ist.

Beweis:
- "$\Rightarrow$" $\quad \mathfrak{g}$ reduktiv $\Rightarrow \mathfrak{g} = \oplus\, \mathfrak{g}_i \qquad \mathfrak{g}_i$ einfach oder abelsch
  d.h. invariante Unterräume von ad
- "$\Leftarrow$" $\quad \underbrace{\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m}_{\text{als Vektorraum}},^{(*)} \quad \mathfrak{g}_i$ inv. UR $\rightarrow$ $\mathfrak{g}_i$ sind Ideale in $\mathfrak{g}$
  $\mathfrak{g}_i$ enthält nur triviale Ideale
  - Sei $X \in \mathfrak{g}_k, Y \in \mathfrak{g}_\ell, k \neq \ell \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}_\ell = \{0\}$
    $\rightarrow [X, Y] = 0$ d.h. $(*)$ ist direkte Summe von Lie-Algebren
  - $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_k$ Ideal $\rightarrow \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Ideal
    $\rightarrow \mathfrak{h} = \{0\}$ oder $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_k$

Folgerung: Die Komplexifizierung der Lie-Algebra einer zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppe ist reduktiv.

Beweis: schon gezeigt: Darstellungen kompakter Lie-Gruppen sind vollständig reduzibel

Theorem: Eine komplexe Lie-Algebra ist halb-einfach genau dann, wenn sie die Komplexifizierung der Lie-Algebra einer einfach-zus. kompakten Lie-Gruppe ist.

Beweis: siehe Varadarajan (1974)

(siehe Nachtrag ↗)

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra. Eine kompakte reelle Form von $\mathfrak{g}$ ist eine reelle Unteralgebra $k \subset \mathfrak{g}$ mit:

- $\mathfrak{g} = k \oplus i\,k$
- $k \cong \mathrm{Lie}(K_1)$, $\quad K_1$ kompakte, einfach-zus. Liegruppe

Bemerkung:
- Jede komplexe halb-einfache Lie-Algebra besitzt eine kompakte reelle Form (nach dem Theorem)
- Die kompakten reellen Formen sind eindeutig bis auf Konjugation
- Es ist möglich, dass $k = \mathrm{Lie}(K)$ mit K nicht einfach-zus.

zB $\quad so(3,\mathbb{C}) \subset gl(3,\mathbb{C})$, $\quad so(3,\mathbb{C}) = so(3) \oplus i\, so(3)$
$so(3) \cong su(2) \quad \Rightarrow K = SO(3),\ K_1 = SU(2)$

Satz: Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halb-einfache Lie-Algebra mit einer kompakten reellen Form k. Ist $\mathfrak{g} \subset gl(n,\mathbb{C})$ eine Unteralgebra und $k = \mathrm{Lie}(K)$, $K \subset GL(n,\mathbb{C})$, dann ist K kompakt.

Beweis: $k \cong \mathrm{Lie}(K_1)$ wie oben

$\Rightarrow \exists\ \varphi: k_1 \xrightarrow{\sim} k \subset gl(n,\mathbb{C})$ Isomorphismus von LA

$\Rightarrow \exists\ \phi: K_1 \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ assoziierter Lie-Gruppenhom.

$K := \mathrm{Im}(\phi) \subset GL(n,\mathbb{C})$

$\Rightarrow K$ ist zus. kompakte Lie-Gruppe mit LA k.

<u>Folgerung</u>: Jede Darstellung einer komplexen halb-einfachen Lie-Algebra ist vollständig reducibel.

<u>Bemerkung</u>: • Eine komplexe Lie-Algebra ist genau dann halb-einfach, wenn jede ihrer Darstellungen vollständig reducibel ist.

<u>zum Beweis</u>: - jede solche Lie-Algebra ist reduktiv
- nicht jede Darstellung einer 1-dim. kommutativen Lie-Algebra ist vollständig reducibel

• Sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra, dann ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach genau dann, wenn $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ halb-einfach ist.

Jede Lie-Algebra einer kompakten einfach-zus. Lie-Gruppe ist halb-einfach.

Die Umkehrung gilt i. A. nicht: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ ist halb-einfach

<u>Definition</u>: Die <u>Killing-Form</u> B einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist definiert als:

$$B(X,Y) = \operatorname{tr}(ad_X \circ ad_Y)$$

<u>Satz</u>: Eine Lie-Algebra ist halb-einfach genau dann, wenn die Killing-Form nicht-ausgeartet ist.

<u>Nachtrag</u>: <u>Satz</u>: Sei G eine kompakte Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. und sei $z(\mathfrak{g})$ das Zentrum von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{g}$ reduktiv, genauer gilt:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus z(\mathfrak{g})$$

wobei $\mathfrak{g}'$ das von $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ erzeugte Ideal in $\mathfrak{g}$ ist
Weiter ist $\mathfrak{g}'$ halb-einfach

<u>zum Beweis</u>: Sei $\langle\, ;\, \rangle$ ein Ad-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$
$\Rightarrow ad_X$ ist schief-symmetrisch

$\Rightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ Ideal $\Rightarrow \mathfrak{a}^{\perp} \subset \mathfrak{g}$ Ideal

$\Rightarrow \mathfrak{g} = s_1 \oplus \dots \oplus s_k \oplus z_1 \oplus \dots \oplus z_n$ direkte Summe minimaler Ideale
$\dim s_i \geq 2, \ \dim z_i = 1$

$\overset{i \neq j}{\Rightarrow} [s_i, s_j] \subset s_i \cap s_j$ d.h. $[s_i, s_j] = 0$

$[s_i, z_j] = 0, \ [z_i, z_j] = 0, \ [z_i, z_i] = 0 \ \dots \Rightarrow z_1 \oplus \dots \oplus z_n = z(\mathfrak{g})$

<u>Beispiele.</u> • <u>einfache komplexe Lie-Algebren</u>

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \qquad n \geq 2$

$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \qquad n \geq 5 \qquad\qquad \mathfrak{so}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \qquad n \geq 1 \qquad\qquad \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

und die Lie-Algebren von G_2, F_4, E_6, E_7, E_8

<u>zum Beweis:</u> jede dieser Lie-Algebren ist die Komplexifizierung der Lie-Algebra einer kompakten einfach-zus. Lie-Gruppe:

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(n)_{\mathbb{C}}$

$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}(n)_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{so}(n) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(n))$

$\mathrm{Spin}(n) = \widetilde{SO(n)}$

• <u>reduktive (nicht halb-einfache) komplexe Lie-Algebren</u>

$\mathfrak{so}(2, \mathbb{C})$

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \qquad\qquad Z(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})) \cong \mathbb{C}$

$\qquad\qquad = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

• <u>reelle halb-einfache Lie-Algebren</u>

$\mathfrak{so}(n) \ (n \geq 3), \quad \mathfrak{su}(n) \ (n \geq 2), \quad \mathfrak{sp}(n)$

$\mathfrak{so}(n, k) \qquad (n+k \geq 3)$

$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

• <u>reelle reduktiv</u> (nicht halb-einfach)

$\mathfrak{so}(2), \quad \mathfrak{so}(1,1)$

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

• Heisenberg-Gruppe, Euklidische Gruppe, Poincaré-Gruppe sind weder reduktiv noch halb-einfach

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halb-einfache Lie-Algebra. Eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist ein komplexer Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ mit:

- $\mathfrak{h}$ ist eine abelsche Unteralgebra: $[H_1, H_2] = 0 \quad \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$
- $\mathfrak{h}$ ist eine maximale abelsche Unteralgebra, d.h.

$$[H, X] = 0 \;\; \forall H \in \mathfrak{h} \;\Rightarrow\; X \in \mathfrak{h} \qquad (\text{für alle } X \in \mathfrak{g})$$

- ad_H ist für alle $H \in \mathfrak{h}$ diagonalisierbar

Bemerkung:
- $\{ \mathrm{ad}_H \mid H \in \mathfrak{h} \}$ sind für eine Cartan-Unteralgebra simultan diagonalisierbar
- Cartan-Unteralgebren kann man für beliebige Algebren definieren. Allerdings läßt sich i.A. die Existenz nur im halb-einfachen Fall zeigen.

Satz: Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halb-einfache Lie-Algebra und $\mathfrak{k}$ eine kompakte reelle Form. Sei $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ eine maximale abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{k}$. Dann ist

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\,\mathfrak{t} \qquad (*)$$

eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Bemerkung:
- Jede Lie-Algebra besitzt eine maximale abelsche Unteralgebra.

  da: - ein-dimensionale UR sind abelsche Unteralgebren
  - man betrachtet aufsteigende Ketten abelscher UA, die abbrechen müssen, da die LA endlich-dim. ist.

- Jede Cartan-Unteralgebra ist von der Form $(*)$
- Alle Cartan-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ sind zueinander konjugiert und haben die gleiche Dimension

Definition: Der Rang einer komplexen Lie-Algebra ist die Dimension einer Cartan-Unteralgebra