12. Vorlesung
15.01.09

Wiederholung:

- $\mathfrak{g}$ ist <u>einfache</u> Lie-Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ hat nur triviale Ideale

(Ideal = invariante Unterraum der adjungierte Darstellung)

- $\mathfrak{g}$ <u>halbeinfach</u> $\Leftrightarrow$ direkte Summe einfacher LA
  - $\Leftrightarrow$ Komplexifizierung der LA einer einfach-zus. kompakten Gruppe
  - $\Leftrightarrow$ jede $\mathfrak{g}$-Darstellung ist vollständig reduzibel
  - $\Leftrightarrow$ Killing-Form ist nicht ausgeartet

- <u>Beispiele</u>: $sl(n,\mathbb{C})$, $so(n,\mathbb{C})$, $sp(n,\mathbb{C})$ und exzeptionelle LA

- <u>Cartan-Unteralgebra</u> $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ mit:
  - $\mathfrak{h}$ ist maximal abelsch
  - ad_H ist diagonalisierbar für alle $H \in \mathfrak{h}$

- <u>Existenz</u>:

<u>Satz</u>: Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halb-einfache Lie-Algebra und k eine kompakte reelle Form. Sei $t \subset k$ eine maximal abelsche Unteralgebra von k. Dann ist

$$\mathfrak{h} = t + it \qquad (*)$$

eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$

- <u>Bemerkung</u>:
  - Jede LA besitzt eine maximal abelsche Unteralgebra
  - Jede Cartan-Unteralgebra ist von der Form $(*)$
  - Alle Cartan-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ sind zueinander konjugiert und haben insbesondere die gleiche Dimension

- <u>Definition</u>: Der <u>Rang</u> einer komplexen Lie-Algebra ist die Dimension einer Cartan-Unteralgebra

<u>Beweis des Satzes</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} \cong \mathrm{Lie}(K_1)$, $= \mathrm{Lie}(K)$ K_1 einfach-zus., kompakt, K kompakt

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ ist maximal abelsch in $\mathfrak{g}$
  - klar: $\mathfrak{h}$ ist abelsch
  - sei $X \in \mathfrak{g}$ mit $[X, H] = 0 \quad \forall H \in \mathfrak{h}$ zz: $X \in \mathfrak{h}$

    $X = X_1 + iX_2$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{k}$, $H \in \mathfrak{t}$! $\quad \mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ maximal abelsch

    $\Rightarrow \quad 0 = [H, X] = [H, X_1] + i[H, X_2]$

    $\rightarrow \quad [H, X_1] = 0 = [H, X_2]$ da $[H, X_1], [H, X_2] \in \mathfrak{k}$, Zerlegung eindeutig

    $\rightarrow \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$ da: $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ maximal abelsch

    $\rightarrow \quad X \in \mathfrak{h}$

- zz ad_H ist diagonalisierbar für alle $H \in \mathfrak{h}$

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Ad_K-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{k}$

$\rightarrow$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ein $\mathbb{C}$-wertiges Ad_K-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$

$\rightarrow$ $\mathrm{Ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist unitär für alle $A \in K$

$\rightarrow$ $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist schief-hermitesch für alle $X \in \mathfrak{k}$

$\rightarrow$ ad_H ist schief-hermit. für alle $H \in \mathfrak{t}$

$\rightarrow$ ad_H ist diagonalisierbar für alle $H \in \mathfrak{t}$

$H = H_1 + i H_2$, $\quad H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$

$[H_1, H_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{ad}_{H_1}, \mathrm{ad}_{H_2}] = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{ad}_H$ ist diagonalisierbar

$\rightarrow$ $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist eine Cartan-Unteralgebra

Wurzeln und Wurzelräume

Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ eine kompakte - reelle Form
$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\,\mathfrak{t}$ eine Cartan-Unteralgebra, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ maximal abelsch
$\langle\, ;\, \rangle$ sei Ad_K-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ (reell-wertig auf $\mathfrak{k}$!)

Definition: Eine Wurzel von $\mathfrak{g}$ (bzgl. der CUA $\mathfrak{h}$) ist ein $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit:

$$\exists\, X \in \mathfrak{g},\ X \neq 0: \quad [H, X] = \alpha(H)\, X \quad \forall\, H \in \mathfrak{h}$$

Die Menge aller Wurzeln von $\mathfrak{g}$ wird mit R bezeichnet

Satz: Ist α eine Wurzel, dann ist $\alpha(H)$ imaginär für alle $H \in \mathfrak{t}$

Beweis: ad_H ist schief-hermit. für alle $H \in \mathfrak{t}$
$\Rightarrow$ alle Eigenwerte, also die Zahlen $\alpha(H)$, sind imaginär.

Bemerkung:
- $\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda|_{\mathfrak{t}} \text{ ist imaginär} \}$ ist ein reeller VR mit Dimension $= \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$
- $R \subset i\,\mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{t}^* =$ reellwertige Linearformen

Definition: Sei α eine Wurzel von $\mathfrak{g}$. Der Wurzelraum $\mathfrak{g}^\alpha$ ist definiert als

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)\, X \quad \forall\, H \in \mathfrak{h} \}$$

Wurzelvektoren sind die Vektoren in $\mathfrak{g}^\alpha$.

Bemerkung: Für jedes $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ schreibt man $\mathfrak{g}^\alpha$ wie oben
zB $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ da $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ maximal abelsch

Satz: Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zerfällt als direkte Summe von Wurzelräumen (= Wurzelraumzerlegung):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

Beweis: die Endomorphismen ad_H, $H \in \mathfrak{h}$, sind simultan diagonalisierbar

Satz: Seien $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, dann gilt: $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$

d.h.: $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}, Y \in \mathfrak{g}^{\beta} \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$

Dabei ist $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta} = \{0\}$, falls $\alpha+\beta$ keine Wurzel ist.

Beweis: $[H,[X,Y]] = [[H,X],Y] + [X,[H,Y]]$ da ad_H ist eine Derivation ≙ Jacobi-Identität

Bemerkung: $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}, Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha} \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{h}$

Satz: ① Ist $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ eine Wurzel, so auch $-\alpha$

② $\mathfrak{h}^* = \mathrm{span}\{\alpha \mid \alpha \in R\}$ d.h. $\mathfrak{h}^*$ wird von den Wurzeln aufgespannt

Beweis: zu ①: $\exists X: [H,X] = \alpha(H)X$, $X = X_1 + iX_2$, $X_1, X_2 \in k$

$\rightarrow [H,X] = [H,X_1] + i[H,X_2]$, $[H,X_1], [H,X_2] \in k$ $\forall H \in t$

$\rightarrow [H,X] = -aX_2 + iaX_1$ für $\alpha(H) = ia$, $a \in \mathbb{R}$

$\rightarrow [H,X_1] = -aX_2$, $[H,X_2] = aX_1$

Sei $Y := X_1 - iX_2$ $\rightarrow$

$$\begin{aligned}[H,Y] &= [H,X_1] - i[H,X_2] \\ &= -aX_2 - iaX_1 \\ &= -ia(X_1 - iX_2) \\ &= -iaY\end{aligned}$$

zu ②: Annahme $\mathrm{span}\{\alpha \mid \alpha \in R\} \subsetneq \mathfrak{h}^*$

$\rightarrow \exists H \in \mathfrak{h}: \alpha(H) = 0 \quad \forall \alpha \in R$

$\rightarrow [H,H_1] = 0 \ \forall H_1 \in \mathfrak{h}$, $[H,X] = \alpha(H)X$ für $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$

$\rightarrow H \in z(\mathfrak{g}) \rightarrow H = 0$ da $\mathfrak{g}$ halb-einfach, also $z(\mathfrak{g}) = \{0\}$

<u>Theorem:</u> ① $\alpha \in R,\quad k\cdot\alpha \in R \quad \Rightarrow \quad k = \pm 1$

② $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$

③ $\forall \alpha \in R \quad \exists\ X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha,\ Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha},\ H_\alpha \in \mathfrak{h}$ mit

$$\left.\begin{aligned} [H_\alpha, X_\alpha] &= 2X_\alpha \\ [H_\alpha, Y_\alpha] &= -2Y_\alpha \\ [X_\alpha, Y_\alpha] &= H_\alpha \end{aligned}\right| \quad \text{d.h. } \operatorname{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\} \cong sl(2,\mathbb{C})$$

Das Element H_α ist eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von der Wahl von X_α, Y_α.

Bezeichnung: Die Vektoren H_α heißen <u>Ko-Wurzeln</u>

<u>zum Beweis:</u> Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Ad_K-invariante Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ d.h.

$$\langle [X,Y], Z\rangle = -\langle Y, [X,Z]\rangle \quad \forall X \in \mathfrak{k},\ Y,Z \in \mathfrak{g}$$

(∗) • $\langle [X,Y], H\rangle = \alpha(H)\langle Y, X^*\rangle \qquad X,Y \in \mathfrak{g},\ \alpha \in R,\ H \in \mathfrak{h},\ X^* = -\bar{X}$

<u>da</u>
$$\begin{aligned}\langle [X,Y], H\rangle &= \langle [X_1,Y], H\rangle + i\langle [X_2,Y], H\rangle \\ &= -\langle Y, [X_1,H]\rangle - i\langle Y, [X_2,H]\rangle \\ &= \langle Y, [X^*, H]\rangle \\ &= -\langle Y, [H, X^*]\rangle = \alpha(H)\langle Y, X\rangle \qquad X^* \in \mathfrak{g}^{-\alpha}\end{aligned}$$

• $X \in \mathfrak{g}^\alpha,\ Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha} \Rightarrow [X,Y] \in (\ker\alpha)^\perp, \quad \dim(\ker\alpha)^\perp = 1$

• $X \in \mathfrak{g}^\alpha \quad \Rightarrow [X,X^*] \neq 0,\quad \alpha([X,X^*]) \in \mathbb{R}_+$

<u>da</u> - (∗) mit: $Y = X^*,\ H \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(H) \neq 0 \qquad \Rightarrow [X,X^*] = 0$

- (∗) mit: $H = [X,X^*],\ Y = X^* \qquad \Rightarrow \alpha([X,X^*]) = \frac{\|[X,X^*]\|^2}{\|X^*\|^2} > 0$

• man definiert:

$X \in \mathfrak{g}^\alpha$ beliebig, ungleich Null, $Y := X^*,\quad H = [X,X^*]$

$$H_\alpha := \frac{2}{\alpha(H)} H,\qquad X_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\alpha(H)}}\, X,\qquad Y_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\alpha(H)}}\, Y$$

Insbesondere: $\alpha(H_\alpha) = 2$

Satz: Sei $\alpha, \beta \in R$ mit Ko-Wurzel H_α, dann gilt:

$$\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$$

Beweis: $S_\alpha := \operatorname{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ ist eine S_α-Darstellung (Einschränkung der adjungierten Darstellung)

$\Rightarrow$ Eigenwerte von $\operatorname{ad}_{H_\alpha}$ sind ganzzahlig

$\Rightarrow$ $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ da $\operatorname{ad}_{H_\alpha}(X_\beta) = [H_\alpha, X_\beta] = \beta(H_\alpha) X_\beta$, $\underset{\neq 0}{X_\beta} \in \mathfrak{g}^\beta$

Bemerkung: Da $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$, kann man Wurzeln mit Vektoren in $\mathfrak{h}$ identifizieren:

$$\alpha \mapsto \alpha^\# \quad \text{mit} \quad \alpha(H) = \langle \alpha^\#, H \rangle \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

(konjugiert linearer Iso.)

Lemma:
- $\alpha^\# \in i\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$
- $\operatorname{span}\{\alpha^\# \mid \alpha \in R\} = \mathfrak{h}$

Satz: $H_\alpha = 2 \dfrac{\alpha^\#}{\langle \alpha^\#, \alpha^\# \rangle}$, $\alpha^\# = 2 \dfrac{H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}$

Beweis: • $H_\alpha \in (\ker \alpha)^\perp$, $\dim \ker \alpha = 1$

• $\ker \alpha = \{H \mid \alpha(H) = 0\} = (\alpha^\#)^\perp \Rightarrow (\ker \alpha)^\perp = \mathbb{C} \cdot \alpha^\#$

$\Rightarrow H_\alpha = c \cdot \alpha^\#$ $\Rightarrow 2 = \alpha(H_\alpha) = c \cdot |\alpha^\#|^2$

$\Rightarrow c = \dfrac{2}{\langle \alpha^\#, \alpha^\# \rangle}$ $\qquad \langle H_\alpha, H_\alpha \rangle = c \cdot \alpha(H_\alpha) = 2c$

$\quad = \dfrac{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}{2}$

Folgerung:
- $|\alpha^\#|^2 \cdot |H_\alpha|^2 = 4$
- $2 \dfrac{\langle \beta^\#, \alpha^\# \rangle}{\langle \alpha^\#, \alpha^\# \rangle} \in \mathbb{Z}$

Beweis: $H_\alpha = 2 \cdot \dfrac{1}{|\alpha^\#|^2} \cdot 2 \cdot \dfrac{H_\alpha}{|H_\alpha|^2}$ $\;\vdots\;$ $\beta(H_\alpha) = \langle \beta^\#, H_\alpha \rangle = 2 \dfrac{\langle \beta^\#, \alpha^\# \rangle}{\langle \alpha^\#, \alpha^\# \rangle}$

$\Rightarrow 1 = 4 \cdot \dfrac{1}{|\alpha^\#|^2 |H_\alpha|^2}$