13. Vorlesung
28.01.09

A

Wiederholung

- $\mathfrak{g}$ halb-einfach, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ kompakte reelle Form

  $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$, K kompakt

  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartan-Unteralgebra

  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ maximal abelsch

  $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$, T max. Torus

  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Ad_K-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{k}$

  $\rightsquigarrow$ " – " auf $\mathfrak{g}$: $\mathbb{C}$-antilinear im 1. Eintrag, reell-wertig auf $\mathfrak{k}$

- Wurzeln: $\alpha \in \mathfrak{h}^*$

  mit $[H, X] = \alpha(H) X \quad \forall H \in \mathfrak{h}$

  Wurzelraum: $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H) X \;\; \forall H \in \mathfrak{h}\}$

  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$

  $\Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$ Wurzelraumzerlegung

  Eigenschaften:
  - $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$
  - $\alpha \in R \Rightarrow -\alpha \in R$ einziges Vielfaches von α in R
  - $\mathfrak{h}^* = \mathrm{span}\{\alpha \mid \alpha \in R\}$
  - $\alpha(H) \in i\mathbb{R}$ für alle $H \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$!

    $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$
  - $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$
  - $\exists X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}, H_\alpha \in \mathfrak{h}$ mit:

Ko-Wurzeln: H_α $\quad [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$, $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$, $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$

zur Definition: $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ $Y := X^* \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $H := [X, X^*] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$

$H_\alpha = \frac{2}{\alpha(H)} \cdot H$ $\quad$ gezeigt: $\alpha(H) \in \mathbb{R}_+$

- $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$

  da: - $\operatorname{span}\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\} \cong sl(2,\mathbb{C})$
  - $[H_\alpha, X_\beta] = \beta(H_\alpha) X_\beta$ Eigenwert der $sl(2,\mathbb{C})$-Darst. auf $\mathfrak{g}$

- Identifikation: $\mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}$, $\alpha \longmapsto \alpha^\#$ mit $\alpha(H) = \langle \alpha^\#, H \rangle \quad \forall H \in \mathfrak{h}$

  $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist anti-linear im 1. Eintrag

Eigenschaften:
- $\alpha^\# \in i\mathfrak{t}$ für $\alpha \in R$
- $\operatorname{span}\{\alpha^\# \mid \alpha \in R\} = \mathfrak{h}$
- $H_\alpha = 2\dfrac{\alpha^\#}{\langle \alpha^\#, \alpha^\# \rangle}$, $\alpha^\# = 2\dfrac{H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}$
- $|\alpha^\#|^2 \cdot |H_\alpha|^2 = 4$ (*)
- $2 \cdot \dfrac{\langle \beta^\#, \alpha^\# \rangle}{\langle \alpha^\#, \alpha^\# \rangle} \in \mathbb{Z}$ (**)

zu (*): $H_\alpha = \dfrac{2}{|\alpha^\#|^2} \cdot \dfrac{2}{|H_\alpha|^2} H_\alpha \implies 1 = \dfrac{4}{|\alpha^\#|^2 \cdot |H_\alpha|^2}$

zu (**): $\beta(H_\alpha) = \langle \beta^\#, H_\alpha \rangle = 2\dfrac{\langle \beta^\#, \alpha^\# \rangle}{\langle \alpha^\#, \alpha^\# \rangle} \in \mathbb{Z}$

Die Weyl-Gruppe

- $Z(t) = \{ A \in K \mid Ad_A(H) = H \quad \forall H \in t \}$

  $N(t) = \{ A \in K \mid Ad_A(t) \subset t \}$

Definition: Die Weyl-Gruppe von $\mathfrak{g}$ ist definiert als

$$W = N(t) / Z(t)$$

- $Z(t) \subset N(t)$ Normalteiler
- $Z(t) = T$

Bemerkung: $W = \{ Ad_A : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h} \mid A \in N(t) \}$

$w \cdot H = Ad_A(H)$ für $w = [A]$, $H \in t$ + $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung

Satz:
1. Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathfrak{h}$ ist W-invariant
2. Die Menge der Wurzeln $R \subset \mathfrak{h}$ ist W-invariant
3. Die Menge der Ko-Wurzeln ist W-invariant: $w \cdot H_\alpha = H_{w \cdot \alpha}$
4. Die Weyl-Gruppe ist endlich

zum Beweis: zu 1: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Ad_K-invariant

zu 2: $w \cdot \alpha$ ist Wurzel zum Wurzelvektor $Ad_A(X)$, $w = [A]$, X Wurzelvektor zu α

$$[H, Ad_A(X)] = Ad_A([Ad_{A^{-1}}(H), X]) = \langle \alpha, Ad_{A^{-1}}(H) \rangle \, Ad_A(X)$$
$$= \langle Ad_A(\alpha), H \rangle \, Ad_A(X) = w \cdot \alpha(H) \, Ad_A(X)$$

zu 3: $w \cdot H_\alpha = 2 \frac{w\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2 \frac{w\alpha}{\langle w\alpha, w\alpha \rangle} = H_{w \cdot \alpha}$

zu 4: W permutiert die Wurzeln, R ist endlich

<u>Satz:</u> Zu jeder Wurzel $\alpha \in R$ existiert ein $w_\alpha \in W$ mit.

$$w_\alpha \cdot \alpha = -\alpha$$
$$w_\alpha \cdot H = H \qquad \forall\, H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}},\ H \perp \alpha$$

<u>Bemerkung:</u> w_α ist die Spiegelung an der Hyperfläche $\alpha^\perp$

$$\Rightarrow \quad w_\alpha\, \beta = \beta - 2\,\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\,\alpha$$

d.h. $\beta - w_\alpha \beta$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von α

<u>zum Beweis:</u>

- $A_\alpha := \exp\left[\frac{\pi}{2}\,(X_\alpha - Y_\alpha)\right] \in N(t)$
- $\mathrm{Ad}_{A_\alpha}(H) = H$ für $H \perp \alpha$
- $\mathrm{Ad}_{A_\alpha}(H_\alpha) = -H_\alpha$

<u>Satz:</u> Die Weyl-Gruppe wird erzeugt von den Elementen w_α für $\alpha \in R$.

<u>Bemerkung:</u> Dies ist die übliche algebraische Definition der Weyl-Gruppe

Wurzelsysteme

Sei $E = i\mathfrak{t}$ $\rightarrow$ E ist ein reeller Vektorraum mit einem reell-wertigen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$\langle iX, iY\rangle = (-i)i\,\langle X, Y\rangle = \langle X, Y\rangle$$

Satz: Die Wurzeln bilden eine endliche Menge von Vektoren $(\neq 0)$ in einem euklidischen Vektorraum E und

① $E = \operatorname{span}\{\alpha \mid \alpha \in R\}$

② $\alpha \in R,\ k\cdot\alpha \in R \Rightarrow k = \pm 1$

③ $\alpha \in R$, W_α definiert wie oben, dann gilt

$\alpha, \beta \in R \Rightarrow W_\alpha \cdot \beta \in R$

④ $\alpha, \beta \in R$ dann gilt:

$$2\,\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$$

Bemerkungen:

- Ein Paar (E, R) mit den Eigenschaften ①–④ nennt man Wurzelsystem.
- Die Weyl-Gruppe eines Wurzelsystems ist die Gruppe linearer Abbildungen, die von den W_α erzeugt wird $\qquad W \subset O(E)$
- Die Ko-Wurzeln H_α bilden auch ein Wurzelsystem: das duale Wurzelsystem

Positive Wurzeln

Rang $(E, R) = \dim E$

Sei (E, R) ein Wurzelsystem

Definition: • Basis für R: $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset R$

mit • Δ ist Basis für E

• $\forall \alpha \ \exists n_i : \alpha = n_1\alpha_1 + \ldots + n_r\alpha_r$
und
$n_i \in \mathbb{Z}$, $n_i > 0 \ \forall_i$ oder $n_i < 0 \ \forall_i$

• positive Wurzeln: $\alpha = n_1\alpha_1 + \ldots + n_r\alpha_r \in R$, $n_i > 0 \ \forall_i$

negative Wurzeln: " — " $n_i < 0 \ \forall_i$

• einfache Wurzeln = Elemente von Δ

Satz: Jedes Wurzelsystem besitzt eine Basis.

zum Beweis: • $\alpha^\perp \subset E$ ist eine Hyperebene

• Weyl-Kammer = Zusammenhangskomponente von $E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \alpha^\perp$ → konvex

• man hat eine 1:1-Beziehung zwischen Weyl-Kammern und der Menge der Basen in E

$K \subset E$ sei eine Weyl-Kammer

ein v aussteilend

positive Wurzeln $R^+(K) = \{\alpha \in R \mid \langle \alpha, v \rangle > 0 \ \forall v \in K\}$

Basis $\Delta(K) =$ Menge der in $R^+(K)$ unzerlegbaren Elemente

umgekehrt: $K(\Delta) = \{v \in V \mid \langle \alpha, v \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}$

Weyl-Kammer zu Δ Δ Basis in R

Beispiel $sl(n, \mathbb{C})$

- Kompakte reelle Form: $\mathfrak{k} = su(n)$
- maximale abelsche Unteralgebra: $\mathfrak{t} = \{ \operatorname{diag}(ia_1, \dots, ia_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, \sum a_i = 0 \}$
- Wurzeln: E_{kl} sei die Matrix mit einer 1 in der k-ten Zeile und l-ten Spalte, sonst Null $E_{kl} : e_l \mapsto e_k$

  $H = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\mathfrak{h} = \operatorname{diag}((\lambda_1 \dots \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{C}, \sum \lambda_i = 0\}$ Cartan-Unteralgebra

  $\rightarrow [H, E_{kl}] = (\lambda_k - \lambda_l) E_{kl}$

  $\Rightarrow R = \{ e_k - e_l \mid k \neq l \}$ $e_k(\operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)) = \lambda_k$

  $X_{\alpha_{kl}} = E_{kl}, \; Y_{\alpha_{kl}} = E_{lk}$ $\alpha_{kl} = e_k - e_l$

  $H_{\alpha_{kl}} = E_{kk} - E_{ll}$

- Bezeichnung: A_{n-1} (da Rang $= n-1$)
- Skalarprodukt: $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(X^* Y) = \frac{1}{2n} B(X, Y)$,   B: Killing-Form

  $\rightarrow$ alle Wurzeln haben die Länge $\sqrt{2}$

- Weyl-Gruppe: S_n
- positive Wurzeln: $R^+ = \{ \alpha_{kl} \mid k < l \}$

  einfache Wurzeln: $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1\,n}$