Darstellungstheorie halb-einfacher Lie-Algebren

- $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ halbeinfach, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$
  Cartan-UA: $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$
  Wurzeln: $R \subset i\mathfrak{t}$
  Basis: $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ $\quad \alpha_i$: einfache Wurzeln
  Kowurzeln: $H_\alpha = 2\dfrac{\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, $\quad \alpha = 2\dfrac{H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}$

- <u>Definition</u>: Ein Element $\mu \in \mathfrak{h}$ heißt <u>ganz-zahlig</u> falls
$$\langle \mu, H_\alpha \rangle \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha \in R$$

<u>Satz</u>: Die ganz-zahligen Elemente in $\mathfrak{h}$ sind W-invariant.

<u>Beweis</u>: $\langle w \cdot \mu, H_\alpha \rangle = \langle \mu, w^{-1} H_\alpha \rangle = \langle \mu, H_{w^{-1}\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}$

<u>Satz</u>: Ein Element $\mu \in \mathfrak{h}$ ist ganz-zahlig falls
$$\langle \mu, H_\alpha \rangle \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

<u>Beweis</u>: $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_r}$ ist eine Basis im dualen Wurzelsystem
$\Rightarrow H_\alpha$ ist ganz-zahlige Linearkombination der H_{α_i}

<u>Folgerung 1</u>: μ ist ganz-zahlig $\Leftrightarrow$ $2\dfrac{\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$

<u>Folgerung 2</u>: Jede Wurzel ist ganz-zahlig

<u>Definition</u>: Ein Element $\mu \in \mathfrak{h}$ heißt <u>dominant integral</u> falls

$$\langle \mu, H_\alpha \rangle \in \mathbb{N} \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{N}$$

<u>Definition</u>: Die Menge der $\mu \in it$ mit $\langle \mu, \alpha \rangle \geq 0$ für alle $\alpha \in \Delta$ heißt (abgeschlossene) <u>fundamentale Weyl-Kammer</u> bezgl. Δ. $\overline{K}$

<u>Definition</u>: Sei (π, V) eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung. Ein Element $\mu \in \mathfrak{h}$ heißt <u>Gewicht</u> von π, falls ein $v \in V$ existiert mit $v \neq 0$

$$\pi(H)v = \langle \mu, H \rangle v \quad \forall H \in \mathfrak{h} \qquad (*)$$

<u>Gewichtsvektor</u> = Vektor v mit $(*)$

<u>Gewichtsraum</u> = Raum der Gewichtsvektoren (mit Nullvektor)

<u>Vielfachheit</u> = Dimension des Gewichtsraumes

<u>Bemerkung</u>:
- Die Wurzeln sind die Gewichte der adjungierten Darstellung.
- Isomorphe Darstellungen haben die gleichen Gewichte und Vielfachheiten

<u>Satz</u>: Sei $\mu \in \mathfrak{h}$ Gewicht einer endlich-dimensionalen Darstellung (π, V). Dann ist μ ganz-zahlig

<u>Beweis</u>: man betrachtet $\pi|_{\mathrm{span}\{X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha\}}$ und

erhält eine $sl(2,\mathbb{C})$-Darstellung auf V.

$\rightarrow \pi(H_\alpha)$ hat ganz-zahlige Eigenwerte

$\rightarrow \langle \mu, H_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

<u>Bemerkung</u>: Jedes ganz-zahlige Element $\mu \in \mathfrak{h}$ erhält man als Gewicht einer geeigneten Darstellung

<u>Satz:</u> Sei v ein Gewichtsvektor zum Gewicht μ und sei $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$. Dann gilt für alle $H \in \mathfrak{h}$:

$$\pi(H)\pi(X_\alpha)v = \langle \mu+\alpha, H \rangle \pi(X_\alpha)v$$

<u>Satz:</u> Jede endlich-dimensionale Darstellung ist direkte Summe ihrer Gewichtsräume.

<u>Satz:</u> Die Menge der Gewichte und ihre Vielfachheiten einer endlich-dimensionalen Darstellung sind W-invariant.

<u>zum Beweis:</u> • $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_1 = \mathrm{Lie}(K_1)$
K_1 kompakt, einfach zus.

$\Rightarrow \exists$ K_1-Darstellung φ mit $\varphi(\exp X) = \exp \pi(X)$

• weiter wie im Beweis für $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

<u>Definition:</u> • Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{h}$, dann ist μ_1 <u>höher</u> als μ_2 ($\mu_2 \prec \mu_1$) falls:

$$\mu_1 - \mu_2 = a_1\alpha_1 + \dots + a_r\alpha_r$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}_+$. $\quad \Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$

• Sei (π, V) eine $\mathfrak{g}$-Darstellung ein Gewicht μ_0 von π heißt <u>höchstes Gewicht</u> falls

$$\mu \prec \mu_0$$

für alle Gewicht μ von π

Satz vom höchsten Gewicht

Satz: ① Jede irreducible Darstellung hat ein höchstes Gewicht.

② Zwei Darstellungen mit dem gleichen höchsten Gewicht sind isomorph.

③ Das höchste Gewicht einer irreducibelen Darstellung ist dominant ganz-zahlig

④ Jedes dominant ganz-zahlige Element von $\mathfrak{h}$ tritt als höchstes Gewicht einer irreducibelen $\mathfrak{g}$-Darstellung auf.

Bemerkung: Teile ①, ②, ③ werden wie im $sl(3,\mathbb{C})$-Fall bewiesen.

Weyl-Charakter-Formel

Satz: Sei (π, V) eine irreducible Darstellung der kompakten Gruppe. Dann gilt für die Einschränkung von χ_π auf T:

$$\chi_\pi(\exp H) = \frac{\sum \det(w) \cdot e^{i\langle w(\mu+\delta), H\rangle}}{\sum \det(w)\, e^{i\langle w\cdot\delta, H\rangle}}$$

wobei die Summe über $w \in W$ geht und δ definiert ist als:

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+} \alpha$$

Weyl-Dimensions-Formel

Satz: Sei (π, V) eine irreducible $\mathfrak{g}$-Darstellung mit höchstem Gewicht μ. Dann gilt:

$$\dim V = \frac{\prod_{\alpha\in R^+} \langle \alpha, \mu+\delta\rangle}{\prod_{\alpha\in R^+} \langle \alpha, \delta\rangle}$$

Fundamentale Gewichte

Sei $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ eine Basis in (E, R) $\qquad E = it$

<u>Definition</u>: Die fundamentalen Gewichte λ_i sind definiert als duale Basis zur Basis $\{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_r}\}$, d.h. die λ_i, $i = 1 \dots r$, sind definiert durch die Bedingung

$$\frac{2\langle \lambda_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} = \delta_{ij} \qquad H_{\alpha_j} = \frac{2\alpha_j}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} \qquad (*)$$

<u>Lemma</u>: ① Die fundamentalen Gewichte sind dominant integral, d.h. höchste Gewichte der sogenannten fundamentalen Darstellungen

② $W_{\alpha_i} \cdot \lambda_j = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$

③ Die fundamentalen Gewichte bilden eine Basis im Gitter der ganz-zahligen Elemente (Gewichte) in $\mathfrak{h}$, d.h. für jedes Gewicht μ gilt

$$\mu = \sum_i m_i \lambda_i \qquad \text{mit} \qquad m_i = \langle \mu, \alpha_i \rangle$$

und μ ist dominant integral g.d.w. $m_i \geq 0 \ \forall i$.

④ Sei $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R^+} \alpha$, dann gilt: $\delta = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$

<u>Beweis</u>: <u>zu ①</u> folgt aus $(*)$

<u>zu ③</u>: $\mu \in E$, $\qquad m_i := \langle \mu, \alpha_i \rangle \cdot \frac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}$

$$\Rightarrow \frac{2\langle \mu - \sum_i m_i \lambda_i, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} = 0 \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

$$\Rightarrow \langle \mu - \sum_i m_i \lambda_i, \alpha \rangle = 0 \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \sum_i m_i \lambda_i$$

<u>zu ④</u>: • $W_{\alpha_i}\delta = \delta - \alpha_i = \delta - \frac{2\langle \delta, \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\alpha_i \Rightarrow \langle \delta, \alpha_i \rangle = 1$

• $\delta = \sum_i \langle \delta, \alpha_i \rangle \lambda_i \Rightarrow \delta = \sum_i \lambda_i$

<u>zu ②</u> $\quad W_{\alpha_i}\lambda_j = \lambda_j - \frac{2\langle \lambda_j, \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\alpha_i = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$

Beispiel: $A_2 = sl(3,\mathbb{C})$ $\quad \mathfrak{h} = \operatorname{span}\{H_1, H_2\}$

mit: $H_1 = \operatorname{diag}(1,-1,0)$
$H_2 = \operatorname{diag}(0,1,-1)$

$\Rightarrow \mathfrak{h} = \{\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mid \sum_i \lambda_i = 0\}$

einfache Wurzeln: $\alpha_1 = (2,-1)$ $\quad$ dh $\alpha_1(H_1) = 2,\ \alpha_1(H_2) = -1$

$\alpha_2 = (-1,2)$ $\quad$ dh $\alpha_2(H_1) = -1,\ \alpha_2(H_2) = 2$

Skalarprodukt: $\langle X,Y\rangle = \operatorname{tr}(X^*Y)$ $\rightarrow$ Identifikation $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,-1,0) \\ \alpha_2 &= (0,1,-1) \end{aligned}\right\} \text{ als Vektoren in } \mathfrak{h} \qquad \begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_{12} \\ \alpha_2 &= \alpha_{23}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = 2 , \quad \langle \alpha_1, \alpha_2\rangle = -1 \quad (\hat{=} 120°)$$

fundamentale Gewichte:
$$\lambda_1 = \tfrac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) = (1,0) = \mu_1 = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$
$$\lambda_2 = \tfrac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,1) = \mu_2 = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)$$

$\rightarrow$ **integrale Elemente:** $\mu = (a,b)$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$

dominant integrale Elemente: $\mu_0 = (a,b)$ $\quad a,b \in \mathbb{N}$

fundamentale Darstellungen:
$\Lambda^1 = E$ $\qquad (1,0)$
$\Lambda^2 = \Lambda^2 E \cong \bar{E}$ $\qquad (0,1)$

$$\delta = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+} \alpha = \lambda_1 + \lambda_2 = (1,1) \ \hat{=}\ (1,0,-1)$$

positive Wurzeln:

		$\langle \alpha, \delta\rangle$
$(2,-1)$	$\hat{=}\ (1,-1,0)$	1
$(-1,2)$	$\hat{=}\ (0,1,-1)$	1
$(1,1)$	$\hat{=}\ (1,0,-1)$	2