Darstellungstheorie von SU(n) und SO(n)

① Beispiel $A_n = sl(n+1, \mathbb{C})$

Cartan-Algebra: $\quad \mathfrak{h} = \{ \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \mid \sum_i \lambda_i = 0 \}$

$$\Rightarrow it = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \perp (1, \dots, 1) \}$$

Wurzeln: $\quad \alpha_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j \qquad 1 \leq i,j \leq n+1$

positive Wurzeln: $\quad \alpha_{ij}$ mit $i < j$

einfache Wurzeln: $\quad \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n$

fundamentale Wurzeln: $\quad \lambda_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i - \frac{i}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \qquad 1 \leq i \leq n$

W-inv. Skalarprodukt: $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$

Weyl-Gruppe $= S_{n+1}$!

Bemerkung: Man kann it mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren:

- $it \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\mu_1, \dots, \mu_n)$
  $x_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \mu_i = x_i - x_{n+1}$

  $it = \mathbb{R}^{n+1} / \mathbb{R}(1, \dots 1)$
  $[(x_1, \dots, x_{n+1})] = [(y_1, \dots y_n, 0)]$
  $y_i = x_i - x_{n+1}$

- $\mathbb{R}^n \longrightarrow it$
  $(\mu_1, \dots \mu_n) \mapsto (\mu_1 + \mu, \dots, \mu_n + \mu, \mu)$
  $\mu = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \mu_j$

zB: fundamentale Wurzeln:

$\lambda_i = (1, \dots 1, 0, \dots 0) - \frac{i}{n+1} (1, \dots, 1)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ (die letzte 1 an der Stelle i)

$\Rightarrow x_{n+1} = -\frac{i}{n+1}, \quad x_j = 1 + x_{n+1} \quad j = 1 \dots i, \quad x_j = +x_{n+1} \quad j >$

$\Rightarrow \mu_j = 1 \quad j = 1, \dots i, \quad \mu_j = 0 \quad j = i+1, \dots, n$

dh. man betrachtet $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Menge der Vektoren $(\mu_1 \dots \mu_n, 0)$

<u>fundamentale Weylkammer</u>: $\overline{K} = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} = 0 \}$

<u>integrale Elemente</u>: $I^* = \{ (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{Z}^{n+1} \}$

<u>dominant integrale Elemente</u>: $\overline{K} \cap I^*$

<u>fundamentale Gewichte</u>: $\lambda_i = e_1 + \dots + e_i \qquad 1 \leq i \leq n$

<u>fundamentale Darstellungen</u>: Λ^i mit höchstem Gewicht λ_i

$$\dim \Lambda^i = \binom{n+1}{i}$$

<u>Realisierung</u>: Sei $V = \mathbb{C}^{n+1}$ die Standard-Darstellung

$\to$ Gewichte: $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} = -(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$

Gewichtsvektoren: $e_1, \dots, e_{n+1}$ (kanonische Basis)

$\to \Lambda^i V = \Lambda^i$

höchstes Gewicht: λ_i

entspr. Gewichtsvektor: $v_1 \wedge \dots \wedge v_i$

<u>Lemma</u>: $\Lambda^{n+1-i} \cong \overline{\Lambda^i}$

<u>Beweis</u>: Der Isomorphismus ist definiert durch das Wedge-Produkt

$$\wedge : \Lambda^i V \otimes \Lambda^{n+1-i} V \longrightarrow \Lambda^{n+1} V \cong \mathbb{C}$$

Das ist eine duale Paarung

$\Rightarrow$
- $\overline{V} \cong \Lambda^n V \qquad (*)$
- adjungierte Darstellung: $V \otimes \overline{V} \qquad (**)$

höchste Gewichte: $(*)$: $(1, \dots, 1, 0) = \lambda_n$

$(**)$: $(2, 1, \dots, 1, 0) = \lambda_1 + \lambda_n$

(2) Beispiel $\quad B_n = so(2n+1, \mathbb{C})$

$E = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt, kanonische Basis ε_i

Wurzeln: $\quad \pm \varepsilon_k \qquad 1 \le k \le n$

$\qquad \pm(\varepsilon_k \pm \varepsilon_\ell) \qquad k \neq \ell$

positive Wurzeln: $\quad \varepsilon_k \pm \varepsilon_\ell \qquad 1 \le k < \ell \le n$

$\qquad \varepsilon_k \qquad 1 \le k \le n$

einfache Wurzeln: $\quad \alpha_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \qquad 1 \le k \le n-1$

$\qquad \alpha_n = \varepsilon_n$

Weyl-Gruppe: $\quad S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

fundamentale Weyl-Kammer: $\quad \bar{K} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underset{1 \le k \le n-1}{x_k \ge x_{k+1}}, x_n \ge 0 \}$

zum Beweis: $\quad \mathfrak{t} = \{ \mathrm{diag}(H_1, \ldots, H_r, 0) \}$ mit $H_j = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_j \\ \theta_j & 0 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_{k\ell} = \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & H_\ell \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & N \\ -N^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}_k = \begin{pmatrix} H_k & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 1 \\ -i \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & i \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [H_{k\ell}, X] = i\,(\theta_k - \theta_\ell)\,X$$

$$[H_{k\ell}, Y] = i\,(\theta_k + \theta_\ell)\,Y$$

$$[\tilde{H}_k, Z] = i\,\theta_k\,Z$$

<u>fundamentale Gewichte:</u> $\lambda_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k \qquad 1 \le k \le n-1$

$\lambda_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$

<u>fundamentale Darstellungen:</u>

$V = \mathbb{C}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n+1} \otimes \mathbb{C}$, $\quad u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, u_{n+1}$ Standard-Basis in $\mathbb{R}^{2n+1}$

V: Standard-Darstellung von $\underline{so}(2n+1, \mathbb{C})$

Gewichte: $\pm \varepsilon_k \quad 1 \le k \le n \quad , \quad 0$

Gewichtsvektoren: $u_k \mp i v_k \qquad u_{n+1}$

- λ_k, $1 \le k \le n-1$ ist höchstes Gewicht von $\Lambda^k V$

Gewichtsvektor: $(u_1 - i v_1) \wedge \dots \wedge (u_k - i v_k)$

<u>Lemma:</u> $\Lambda^k V$ ist irreduzibel

- λ_n ist höchstes Gewicht der Spinor-Darstellung Δ

<u>Bemerkung:</u>
- adjungierte Darstellung $= \Lambda^2$
- $\Lambda^k V$ ist auch für $\underline{so}(2n, \mathbb{C})$ irreduzibel, $1 \le k \le n-1$

  $\Lambda^n V = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$

  höchstes Gewicht von $\Lambda^{\pm}$: $(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} \pm \varepsilon_n)$
- $Sym^2 V = \mathbb{C} \oplus Sym^2_0 V$

  spurfrei symmetrisch

  höchstes Gewicht von $Sym^2_0 V$: $2\varepsilon_1$

Das LiE – Programm

- Internet-homepage: www-math.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE/

  hier findet man: – online-Demostration einiger Funktionen
  – vollständiges Manual
  – Informationen zum Download und Installation

- am MI : von einer Thales-Shell startet man Lie mit dem Befehl: Lie.exe

  um alle Daten erreichen zu können muß man zuerst in das Lie-Verzeichnis wechseln:

  cd /cmp/local/LiE/s/Lie

  und danach.

  Lie.exe

- Beispiele einiger Funktionen

  - setdefault A3 — setzt global A3 als betrachtete Gruppe fest, man kann aber auch in jedem Befehl angeben, für welche Gruppe gerechnet werden soll
  - dim → Dimension der Gruppe
  - diagram → Dynkin-Diagram
  - adjoint → die adjungierte Darstellung als Linearkombination der fundamentalen Darstellungen

    im Beispiel A3 : 1X[1,0,1]

    dh. die Darstellung ist irreduzibel mit höchstem Gewicht $\lambda_1 + \lambda_3 \;\hat{=}\; V \otimes \Lambda^3 V \cong V \otimes \bar{V}$

  - alt_tensor(3, [1,0,0], D3) → 1X[0,0,2] + 1X[0,2,0]

$[1,0,0] = \lambda_1$ ist die Standard-Darstellung von $D3 = SO(6)$

man erhält die Zerlegung von $\Lambda^3 \mathbb{C}^6$ in irreduzible Summanden:

$$\Lambda^3 \mathbb{C}^6 \cong \Lambda^3_+ \oplus \Lambda^3_-$$

mit den höchsten Gewichten: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2\lambda_2 = [0,2,0]$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2\lambda_3 = [0,0,2]$

- dim ([1,0,0]) liefert die Dimension der Standard-Darstellung V

- sym_tensor (2, alt_tensor (2, [1,0,0])) für D3

zerlegt $Sym^2(\Lambda^2 V)$ in irreduzible Summanden, man erhält

$$Sym^2(\Lambda^2 V) = 1\times[0,0,0] + 1\times[0,2,2] + 1\times[0,1,1] + 1\times[2,0,0]$$

wobei: $[0,0,0] =$ triviale Darstellung $\hat{=}$ Skalarkrümmung

$[2,0,0] = Sym^2_0 V$ $\hat{=}$ spurfreien Ricci-Tensoren

$[0,2,2] =$ Cartan-Summand (zur Summe der höchsten Gewichte) in $\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V$

$\hat{=}$ Weyl-Tensoren

$[0,1,1] = \Lambda^2 V \cong \Lambda^4 V$

$=$ orthogonales Komplement zum Kern der Bianchi-Abbildung

$$b: Sym^2(\Lambda^2 V) \hookrightarrow \Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V \xrightarrow{\wedge} \Lambda^4 V$$

Λ^2 hat höchstes Gewicht $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ und

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$
$$= \lambda_2 + \lambda_3$$
$$= [0,1,1]$$

- W_orbit ([1,0] , A2)

  liefert den Weyl-Gruppen-Orbit des Vektors [1,0]
  man erhält:

  [[1,0] , [-1,1], [0,-1]]   mit Koordinaten bzgl. der fundamentalen Gewichte

  d.h., wie für $A2 = SU(3)$ gezeigt, ein Dreieck

  W_orbit ([1,1], A2)

  liefert: [[1,1], [-1,2], [2,-1], [1,-2], [-2,1], [-1,-1]]

  d.h., wie gezeigt, ein Sechseck

- branch ([1,0,0], **B2** , m)   wobei D3 als default fixiert ist

dabei muß man die Matrix m
zunächst erzeugen durch:

m = res_mat(B2, D3)   = Restriktions-Matrix für $D3 \to B2$

man erhält eine Zerlegung der Standard-Darstellung
von $D3 = SO(6)$ betrachtet als $B2 = SO(5)$-Darstellung.

LiE liefert:

1 × [0,0] + 1 × [1,0]

d.h. $V|_{SO(5)} = \mathbb{C}^6|_{SO(5)} = \mathbb{C}^5 \oplus \mathbb{C}$

[0,0] = triviale Darstellung von B2

[1,0] = Standard-Darstellung von B2