

Seminar im Sommersemester 2010

# Kähler-Mannigfaltigkeiten



Shiing-Shen Chern



Erich Kähler

**Seminar:** mittwochs, 16-17:30, Seminarraum 2

**Vorbesprechung:** Mittwoch, 14. April 2010, 16h, Seminarraum 1

Vortragsanmeldungen können gerne jederzeit per E-Mail an Prof. Marinescu oder Prof. Semmelmann gerichtet werden.

**Inhalt:** Kähler-Mannigfaltigkeiten sind eine wichtige Klasse differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, die in den verschiedensten Bereichen der Mathematik und theoretischen Physik eine wichtige Rolle spielen. Von besonderer Bedeutung sind sie in der komplexen Analysis und der Differential- bzw. algebraischen Geometrie. Das Zusammenspiel von komplex-algebraischen und analytischen Eigenschaften führt zu einer Reihe sehr interessanter Phänomene (Hodge-Zerlegung, Lefschetz Theorem). Das Seminar soll eine Einführung in die Theorie der Kähler-Mannigfaltigkeiten geben und mit den wichtigsten Eigenschaften und Beispielen vertraut machen.

**Vortragsthemen:** Komplexe Mannigfaltigkeiten, Kähler-Mannigfaltigkeiten, Ricci-Form, Chern-Klassen, Kohomologie, Lefschetz-Zerlegung, Hodge- und Dolbeault Theorie, Verschwindungssätze, Formalität, Kähler-Einstein Metriken, Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten, Kodaira Einbettungssatz, extremale Kähler-Metriken

**Vorkenntnisse:** Zur Teilnahme am Seminar sind Grundkenntnisse der Differentialgeometrie erforderlich (mindestens im Umfang von Analysis III). Weitere Informationen sind zu finden unter:

<http://www.mi.uni-koeln.de/~semmelma/kaehler-seminar.pdf>

## Literatur:

Ballmann, W., Lectures on Kähler manifolds, (EMS), Zürich, 2006.

Besse, A. L., Einstein manifolds, Springer Verlag, Berlin, 2008.

Kobayashi, S., Foundations of differential geometry, Vol. II., New York, 1996.

Moroianu, A., Lectures on Kähler geometry, Cambridge University Press, 2007.

## Vortragsplan zum Seminar Kähler-Mannigfaltigkeiten

### 1. Vortrag, 28.04.10: Komplexe Mannigfaltigkeiten (Johannes Fabrega)

- Komplexe Mannigfaltigkeiten, komplexe Strukturen
- $(p,q)$ -Zerlegung der Differentialformen
- Holomorphe Vektorbündel
- Hermitesche und Kähler-Metriken

([M] S. 57-74, [B] S. 11-24, [KN] S. 114 - 158)

### 2. Vortrag, 05.05.10: Kähler-Mannigfaltigkeiten I (Hendrik Herrmann)

- Definition von Kähler-Mannigfaltigkeiten
- Charakterisierungen von Kähler-Metriken
- Laplace Operatoren

([M] S. 81-91, [B] S. 41-59, [S] Kapitel 4)

### 3. Vortrag, 12.05.10: Kähler-Mannigfaltigkeiten II (Kilian Barth)

- Krümmungs-Tensor
- Killing-Vektorfelder
- Holonomie

([M] S. 81-91, [B] S. 41-59, [S] Kapitel 4)

### 4. Vortrag, 19.05.10: Beispiele von Kähler-Metriken (N.N)

- flache Metrik auf  $\mathbb{C}$
- Fubini-Study-Metrik auf dem komplex projektiven Raum
- Hermitisch symmetrische Räume
- Homogene Kähler-Mannigfaltigkeiten
- Projektive Varietäten

([M] S. 93 - 96, [Be] Kapitel 8, [KN] Kapitel 9.6)

### 5. Vortrag, 02.06.10: Ricci Form I (Sebastian Stock)

- Chern-Klassen (Chern-Weil-Theorie)
- Ricci-Form als Krümmungsform des kanonischen Bündels

([M] S. 111 - 127, [B] 80 - 102, Appendix A, [Be] Kapitel 2.C, Kapitel 11)

### 6. Vortrag, 9.06.10, Ricci Form II (Sebastian Stock)

- Ricci-flache Kähler-Mannigfaltigkeiten
- Calabi-Yau Theorem

([M] S. 111 - 127, [B] 80 - 102, Appendix A, [Be] Kapitel 2.C, Kapitel 11)

### 7. Vortrag, 16.06.10: Kohomologie von Kähler-Mannigfaltigkeiten

- Hodge - und Dolbeault Theorie
- Lefschetz-Zerlegung

- dd\_c Lemma und Formalität  
([M] S. 105 - 109, [B] S. 60 - 75)

### 8. Vortrag, 23.06.10: Verschwindungssätze I

- Weitzenböckformeln
- Verschwindungssätze für holomorphe Vektorfelder und  $(p,0)$ -Formen  
([M] S. 135 - 151, [B] S. 75 - 80)

### 9. Vortrag, 30.06.10: Verschwindungssätze II

- Hirzebruch-Riemann-Roch
- Kodaira-Verschwindungssatz  
([M] S. 135 - 151, [B] S. 75 - 80)

### 10. Vortrag, 07.07.10: Kähler Einstein Metriken

- Aubin Yau Theorem
- Holomorphe Vektorfelder
- Futaki Invarianten  
([M] S. 129 - 133, [Be] Kapitel 2.I., [F])

### 11. Vortrag, 14.07.10: Kodaira Einbettungssatz

([B] S. 114 - 121)

### 12. Vortrag, 21.07.10: Extremale Kähler Metriken

#### Literatur

- [B] Ballmann, W., Lectures on Kähler manifolds, (EMS), Zürich, 2006.
- [Be] Besse, A. L., Einstein manifolds, Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [KN] Kobayashi, S.; Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Vol. II., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [M] Moroianu, A., Lectures on Kähler geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

#### *weitere Literatur*

- [F] Futaki, A. Kähler-Einstein metrics and integral invariants, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [GH] Griffiths, Ph.; Harris, J., Principles of algebraic geometry, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [H] Huybrechts, D., Complex geometry, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [J] Joyce, D., Compact manifolds with special holonomy, University Press, Oxford, 2000.
- [W] Wells, R. O., Jr. Differential analysis on complex manifolds, Prentice-Hall, Inc., N.J.