# Nachtrag zum 1. Übungsblatt (Übungsstunde vom 29.4.)

Hier die "Musterlösung" für einige Aufgabenteile des ersten Übungsblattes – dies hier sollte nur als Ergänzung zun Übungsbetrieb verstanden werden und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

**Aufgabe 2), Teil 1.** Seien $X$ und $Y$ Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine Submersion. Man zeige: $f$ ist eine "offene Abbildung", d.h.

$$U \subset X \text{ offen} \Rightarrow f(U) \subset Y \text{ offen}.$$

**Lösung:** Weil $X$ und $Y$ Mannigfaltigkeiten sind, existieren zu jedem $p$ aus $X$ offene Teilmengen $V \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$, die jeweils die Null enthalten, und lokale Parametrisierungen $\phi : V \to X$, $\psi : \tilde{V} \to Y$ mit $\phi(0) = p$ und $\psi(0) = f(p)$. Wir setzen $U := \phi(V)$ und $\tilde{U} := \psi(\tilde{V})$; dann ist $U$ eine offene Umgebung von $p$ in $X$ und $\tilde{U}$ ist eine offene Umgebung von $f(p)$ in $Y$.

Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die kanonische Projektion ist, d.h.

$$\pi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_m)\ .$$

Weil $f$ eine Submersion ist, gilt nach einem Satz der Vorlesung außerdem $m \leq n$ und zu jedem Punkt $p$ aus $X$ können obige Daten so gewählt werden, daß $f(U) \subset \tilde{U}$ und $\iota(V) \subset \tilde{V}$ gilt und daß zusätzlich folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & \tilde{U} \\ \uparrow{\scriptstyle\phi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ V & \xrightarrow{\pi} & \tilde{V} \end{array}$$

Im folgenden wird eine solche Parametrisierung von $f$ eine "kanonische Parametrisierung" genannt.

Nun sei $U \subset X$ offen. Zu zeigen ist, daß $f(U)$ eine offene Teilmenge von $Y$ ist:

Zunächst nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $f$ kanonisch parametrisiert ist. Dann ist (in obiger Notation) $\pi(V)$ offen in $\mathbb{R}^m$ (vgl. Übungsstunde, weil $\pi$ eine lineare Projektionsabbildung ist) und es gilt $f(U) = \psi(\pi(V))$, weil das Diagramm kommutativ ist. Da außerdem $\psi$ ein Homöomorphismus ist, ist daher auch $f(U)$ offen in $Y$.

Für den allgemeinen Fall wählen wir zu jedem $p \in U$ eine offene Umgebung $\tilde{U}_p$ von $f(p)$ und eine offene Umgebung $U_p$ von $p$ die noch ganz in $U$ enthalten ist, so daß $f(U_p) \subset \tilde{U}_p$ gilt und daß außerdem $U_p$ und $\tilde{U}_p$ kanonisch parametrisiert werden können. Dann gilt $U = \bigcup_{p \in U} U_p$; außerdem ist nach dem ersten Fall $f(U_p)$ jeweils eine offene Teilmenge von $Y$. Weil die Vereinigung von offenen Teilmengen von $Y$ wieder eine offene Teilmenge von $Y$ ist, ist daher auch $f(U) = \bigcup_{p \in U} f(U_p)$ eine offene Teilmenge von $Y$.

**Aufgabe 3)** Seien $X$, $Y$ Mannigfaltigkeiten.

**Definition.** Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(K)$ wieder kompakt ist.

Man zeige: Falls $f : X \to Y$ eine injektive, eigentliche Immersion ist, so ist $f(X)$ eine Untermannigfaltigkeit von $Y$ und $f : X \to f(X)$ ein Diffeomorphismus. (Tip: Man zeige zunächst: Ist $U \subset X$ offen, so ist $f(U) \subset f(X)$ offen in der Teilraum-Topologie.)

**Lösung:** In der Übungsstunde wurde schon Folgendes gezeigt: Ist $U \subset X$ offen, so ist $f(U) \subset f(X)$ offen in der Teilraum-Topologie. Aber wie schließt man jetzt daraus, daß $f(X)$ schon ein Untermannigfaltigkeit von $Y$ und $f : X \to f(X)$ ein Diffeomorphismus ist? Dazu:

Weil $X$ und $Y$ Mannigfaltigkeiten sind, existieren zu jedem $p$ aus $X$ offene Teilmengen $V \subset \mathbb{R}^m$ und $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ , die jeweils die Null enthalten, und lokale Parametrisierungen $\phi : V \to X$ , $\psi : \tilde{V} \to Y$ mit $\phi(0) = p$ und $\psi(0) = f(p)$ . Wir setzen $U := \phi(V)$ und $\tilde{U} := \psi(\tilde{V})$ ; dann ist $U$ eine offene Umgebung von $p$ in $X$ und $\tilde{U}$ ist eine offene Umgebung von $f(p)$ in $Y$ .

Sei nun $\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die kanonische Inklusion ist, d.h.

$$\iota(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ Nullen}}) .$$

Weil $f$ eine Immersion ist, gilt nach einem Satz der Vorlesung außerdem $m \leq n$ und zu jedem Punkt $p$ aus $X$ können obige Daten so gewählt werden, daß $f(U) \subset \tilde{U}$ und $\iota(V) \subset \tilde{V}$ gilt und daß zusätzlich folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & \tilde{U} \\ V \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\iota"] & \tilde{V} \arrow[u, "\psi"] \end{tikzcd}$$

Ich behaupte nun, daß $\tilde{\psi} := \psi \circ \iota : V \to Y$ eine Parametrisierung von $f(X)$ bei $f(p)$ ist:

Da also $f(U)$ offen in $f(X)$ ist, sehen wir daß $\tilde{\psi}(V) = f(\psi(V)) = f(U)$ eine offene Umgebung von $f(p)$ in $f(X)$ ist. Außerdem ist $\tilde{\psi} : V \to f(U)$ bijektiv (weil $\iota$ injektiv ist und $\psi$ bijektiv ist). Es ist zu zeigen, daß auch $\tilde{\psi}^{-1}$ differenzierbar ist:

Sei dazu $\pi : \mathbb{R}^n \to R^m$ die kanonische Projektionsabbildung (vgl. die Lösung von Aufgabe 2)). Da obiges Diagramm kommutativ ist, haben wir

$$\tilde{\psi}(\phi^{-1}(q)) = f(q)$$

für jedes $q \in U$ . Desweiteren gilt $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$ , daher

$$\pi(\psi^{-1}(f(q))) = \pi(\iota(\phi^{-1}(q)) = \phi^{-1}(q)$$

und folglich ist die Umkehrabbildung von $\tilde{\psi}$ durch $\pi \circ \psi^{-1} : f(U) \to V$ gegeben. Da dies eine differenzierbare Abbildung ist, ist also $\tilde{\psi}$ eine Parametrisierung von $Y$ bei $f(p)$ . Weil $p$ ein beliebiger Punkt aus $X$ ist, ist also $f(X)$ eine Untermannigfaltigkeit von $Y$ .

Es bleibt zu zeigen, daß sowohl $f : X \to f(X)$ als auch die Umkehrung dieser Abbildung in jedem Punkt von $f(X)$ differenzierbar sind:

Unter Zuhilfenahme unserer speziellen Parametrisierungen $\tilde{\psi}$ für $f(X)$ kann man die Differenzierbarkeit sowohl von $f : X \to f(X)$ als auch der entsprechenden Umkehrabbildung wie folgt einsehen:

Da folgendes Diagramm kommutativ ist,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & f(U) \\ V \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}"'] & V \arrow[u, "\tilde{\psi}"] \end{tikzcd}$$

und $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$ einen Diffeomorphismus von $V$ auf sich selbst induziert, ist also $f|U$ ein Diffeomorphismus von $U$ auf $f(U)$. Inbesondere ist $f$ differenzierbar in $p$. Da außerdem $f(U)$ offen in $Y$ ist, ist daher auch die Umkehrabbbildung differenzierbar in $f(p)$. Da $p$ ein beliebiger Punkt aus $X$ ist, haben wir damit gezeigt, daß $f$ ein Diffeomorphsimus ist.

**Aufgabe 4)** Sei $P(x_1, \ldots, x_k)$ ein relles Polynom in $k$ Variablen.

**Definition.** $P$ heißt *homogen vom Grad* $m$, falls für jede reelle Zahl $t$ die Gleichung $P(t\,x_1, \ldots, t\,x_k) = t^m\,P(x_1, \ldots, x_k)$ gilt. Beispiel: $x^2 + y^2 + z^2$ ist ein homogenes Polynom vom Grad $2$.

Sei nun $P(x_1, \ldots, x_k)$ homogen vom Grad $m$. Man zeige: Für jedes $a \neq 0$ ist die Menge $P_a := \{\, x \in \mathbb{R}^k \mid P(x) = a \,\}$ eine $k-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$. Desweiteren sind die Mannigfaltigkeiten $P_a$ und $P_b$ diffeomorph, falls $a, b$ beide positiv oder beide negativ sind.

**Lösung:** Als Vorüberlegung sei an "Euler's Identität"

$$m\,P(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i\,\frac{\partial}{\partial i}P(x)$$

erinnert; der Beweis dieser Identität ist recht einfach und wird daher hier ausgelassen.

Wir zeigen nun, daß $P_a$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ ist falls $a \neq 0$. Nach einem Satz der Vorlesung reicht es dafür zu zeigen, daß $\mathrm{d}P_x$ surjektiv ist für alle $x \in \mathbb{R}^k$ mit $P(x) = a$:

Sei $x \in \mathbb{R}^k$ ein Punkt mit $P(x) = a \neq 0$. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{d}P_x$ surjektiv ist. Weil $P$ eine reellwertige Funktion ist, ist das gleichbedeutend mit $\mathrm{d}P_x \neq 0$. Angenommen, $\mathrm{d}P_x = 0$; dann verschwinden also alle partiellen Ableitungen von $P$ in $x$ und daher folgt aus Euler's Identität schon $P(x) = 0$, ein Widerspruch.

Wir sehen also: $\mathrm{d}P_x$ ist surjektiv ist für alle $x$ mit $P(x) \neq 0$. Daher ist $P_a$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ falls $a \neq 0$. Weiterhin bildet die lineare Homothetie $M_c : R^k \to R^k, x \mapsto c\,x$ mit $c := \sqrt[k]{b/a}$ die Untermannigfaltigkeit $P_a$ auf $P_b$ ab falls $a, b$ beide positiv oder beide negativ sind.