Übungsblatt Nr. 1

zum 29.4.2010

Aufgabe 1) Bezeichne S^2 die 2-dimensionale euklidische Sphäre und seien $h_+ : \mathrm{S}^2\backslash\{\mathrm{N}\} \to \mathbb{R}^2$ und $h_- : \mathrm{S}^2\backslash\{\mathrm{S}\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographischen Projektionen vom Nordpol bzw. Südpol. Dann gilt:

1. $\forall x, y, z \in \mathrm{S}^2 \setminus \{\mathrm{N}\} : h_+(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$ und $\forall x, y, z \in \mathrm{S}^2 \setminus \{\mathrm{S}\} : h_-(x, y, z) = (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z})$.
2. Die Umkehrfunktion $h_+^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{S}^2$ ist eine lokale Parametrisierung von S^2 (wie in der Vorlesung definiert). Ditto für h_-^{-1} .
3. Die "Koordinatenübergangsfunktion" $h_- \circ h_+^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist gegeben durch $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ (mit der üblichen Schreibweise $z = x + \mathrm{i}\, y$).

Aufgabe 2) Seien X und Y Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine Submersion.

1. Man zeige: f ist eine "offene Abbildung", d.h.
$$U \subset X \text{ offen} \Rightarrow f(U) \subset Y \text{ offen}.$$
I.b. ist also $f(X)$ offen in Y .
2. Sei nun zusätzlich X kompakt. Gibt es eine Submersion $f : X \to \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 3) Seien X , Y Mannigfaltigkeiten.

Definition. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(K)$ wieder kompakt ist.

Man zeige: Falls $f : X \to Y$ eine injektive, eigentliche Immersion ist, so ist $f(X)$ eine Untermannigfaltigkeit von Y und $f : X \to f(X)$ ein Diffeomorphismus. (Tip: Man zeige zunächst: Ist $U \subset X$ offen, so ist $f(U) \subset f(Y)$ offen in der Teilraum-Topologie.)

Aufgabe 4) Sei $P(x_1, \ldots, x_k)$ ein relles Polynom in k Variablen.

Definition. P heißt *homogen vom Grad* m, falls für jede reelle Zahl t die Gleichung $P(t\, x_1, \ldots, t\, x_k) = t^m\, P(x_1, \ldots, x_k)$ gilt. Beispiel: $x^2 + y^2 + z^2$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 2 .

Sei nun $P(x_1, \ldots, x_k)$ homogen vom Grad m . Man zeige: Für jedes $a \neq 0$ ist die Menge $P_a := \{\, x \in \mathbb{R}^k \mid P(x) = a \,\}$ eine $k-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$. Desweiteren sind die Mannigfaltigkeiten P_a und P_b diffeomorph, falls a, b beide positiv oder beide negativ sind.