Übungsblatt Nr. 2

zum 6.5.2010

Aufgabe 1)

(a) Seien X und Z transversale Untermannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit Y. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist dann ist $X \cap Z$ eine Untermannigfaltigkeit von Y mit $\operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim}(X) + \operatorname{codim}(Z)$. Man zeige nun zusätzlich:

Es gilt $T_y(X \cap Z) = T_y X \cap T_y Z$ für alle $y \in X \cap Z$.

(b) Kann $X \cap Z$ auch dann eine Untermannigfaltigeit von Y sein, wenn sich X und Z *nicht* transversal schneiden? Wenn ja, wie sieht es dann mit der Gleichung $\operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim}(X) + \operatorname{codim}(Z)$ aus?

Aufgabe 2)

(a) Sei V ein Vektorraum und $\Delta := \{ (v,v) \mid v \in V \}$ die "Diagonale" von $V \times V$. Seien nun eine lineare Abbildung $A : V \to V$ gegeben und $G(A) := \{ (A\,v, v) \mid v \in V \}$ ihr "Graph". Man zeige:

$G(A)$ und Δ sind transversal zueinander genau dann, wenn $+1$ kein Eigenwert von A ist.

(b) Sei X eine Mannigfaltigkeit und $f : X \to X$ eine glatte Abbildung. Sei x ein Fixpunkt von f ist (d.h. $f(x) = x$). Falls $+1$ kein Eigenwert von df_x ist, so nennt man x einen *Lefschetz Fixpunkt* von f. Eine glatte Abbildung f wird eine Lefschetz-Abbildung genannt, falls alle Fixpunkte von f Lefschetz sind. Man zeige nun:

Ist X kompakt und $f : X \to X$ eine Lefschetz-Abbildung, so hat f nur endlich viele Fixpunkte.

Aufgabe 3) Sei $f : M \to N \times \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung; man zeige, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| < \epsilon$ gibt, so daß die Abbildung

$$g : M \to N \times \mathbb{R}^n\,,\; x \mapsto f(x) + v$$

transversal zu der Untermannigfaltigkeit $N \times \{0\} \subset N \times \mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 4) Man zeige: Ist $M^n \subset \mathbb{R}^p$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, dann gibt es eine Hyperebene in $\mathbb{R}^p$, die M transversal schneidet.