Übungsblatt Nr. 4

zum 20.5.2010

Aufgabe 1)

(a) Sei X^n eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Man zeige: ∂X ist abgeschlossen in X .

Tip: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in ∂X die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert. Nun wähle man eine lokale Parametrisierung $\phi : U \to X$ ($U \subset H^n$ eine offene Teilmenge) mit $x \in \phi(U)$.

(b) Man zeige: Das Quadrat $\mathrm{Q} := [0,1] \times [0,1]$ ist keine Mannigfaltigkeit mit Rand.

Tip: Angenommen, es existiere eine offene Umgebung V der Ecke $e := (0,0)$ in Q und einen Diffeomorphismus $f : V \to U$ auf eine offenen Teilmenge U der oberen Halbebene. Nun betrachte man die Kurven $c_1 : [0,1] \to \mathrm{H}^2, t \mapsto f((t,0))$ und $[0,1] \to \mathrm{H}^2, t \mapsto f((0,t))$. Warum sind c_1 und c_2 beide rechtsseitig differenzierbar in 0 und die Ableitungsvektoren $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} c_1(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} c_2(t)$ linear abhängig? Wieso folgt daraus ein Widerspruch?

Aufgabe 2)

(a) Man zeige: Das “massive Hyperboloid” $x^2 + y^2 - z^2 \leq a$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand ($a > 0$).

(b) Für welche Werte von a ist der Durchschnitt des massiven Hyperboloids mit der Einheitssphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand? Wie sieht dieser Durchschnitt dann aus?

Aufgabe 3)

(a) Man finde einen Diffeomorphismus von dem offenen Ball $\{x \in \mathbb{R}^n \big| |x|^2 < 1\}$ auf den R^n . Tip: $x \mapsto x/\sqrt{1 - |x|^2}$.

(b) Man zeige: Brouwers Fixpunktsatz ist falsch für den offenen Ball $\{x \in \mathbb{R}^n \big| |x|^2 < 1\}$.

(c) Man zeige: Die Fixpunkte einer Selbstabbildung des abgeschlossenen Balls $B^n_1(0)$ können alle auf dem Rand dieses Balls liegen.

Aufgabe 4) Man finde eine Selbstabbildung des massiven Torus (“Donut”) die keine Fixpunkte hat. Wieso funktioniert der Beweis von Brouwers Fixpunktsatz hier nicht?