Übungsblatt Nr. 5

zum 2.6.2010 (Abgabe schriftlich in der Vorlesung)

Sei X^{n-1} eine zusammenhängende kompakte Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$. Ziel der beiden ersten Aufgaben ist der Beweis des folgenden Theorems:

Theorem 1 (Der Trennungssatz von Jordan/Brouwer)**.** *Das Komplement $\mathbb{R}^n \backslash X$ zerfällt in genau zwei zusammenhängende offene Teilmengen, das "Äußere" D_0 und das "Innere" D_1. Dabei ist $\bar{D}_1$ eine kompakte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial \bar{D}_1 = X$; D_0 dagegen ist nicht kompakt.*

Im Folgenden sei für jedes $z \in \mathbb{R}^n \backslash X$ die "Richtungsabbildung" $\sigma = \sigma_z : X \to \mathrm{S}^{n-1}$ durch $\sigma_z(x) := \frac{x-z}{|x-z|}$ definiert. Dann ist die "Windungszahl" $W_2(X, z)$ der mod 2-Abbildungsgrad von σ_z.

Aufgabe 1)

(a) Sei $z \in \mathbb{R}^n \backslash X$. Man beweise Folgendes: Zu jedem $x \in X$ und jeder offenen Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$ existiert ein weiterer Punkt aus U der mit z so durch einen stetigen Weg verbunden werden kann, daß dieser Weg X nicht trifft.

Tip: Man zeige, daß die Menge der $x \in X$ mit dieser Eigenschaft offen und abgeschlossen und außerdem nicht leer ist. "Abgeschlossenheit" ist klar per Definition. Für "Offenheit": Warum kann man o.B.d.A. annehmen, daß $X = \mathbb{R}^{n-1}$ und $x = 0$ gilt? Für "nicht leer": Man wähle eine Gerade von z nach X die den Abstand von X zu z realisiert.

(b) Man zeige: $\mathbb{R}^n \backslash X$ hat höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.

Tip: Man benutze (a)

(c) Man zeige: Sind z_0 und z_1 in der selben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \backslash X$ enthalten, dann gilt $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$.

Tip: Man verbinde z_0 und z_1 durch eine glatte Kurve welche X nicht trifft. Dann wende man das Homotopie-Lemma für den Abbildungsgrad auf σ_{z_0} und σ_{z_1} an.

Aufgabe 2) Zu jedem $z \in \mathbb{R}^n \backslash X$ und $v \in \mathrm{S}^{n-1}$ sei $r = r_{z,v} := \{z + t\,v | t \in [0, \infty)\}$ der Strahl von z in Richtung v.

(a) Für fast jedes $v \in \mathrm{S}^{n-1}$ schneidet r die Mannigfaltigkeit X transversal (z fest).

Tip: Satz von Sard

(b) Seien nun z und v so gewählt, daß der Schnitt von r mit X transversal und nicht leer ist. Sei $z_1 = z + t\,v$ ein weiterer Punkt auf r der ebenfalls nicht auf X liegt. Sei l die Anzahl der Schnittpunkte von r mit X die zwischen z und z_1 liegen (warum ist diese Zahl endlich?). Man zeige: $W_2(X, z) = W_2(X, z_1) + l \mod 2$.

Tip: Man zeichne ein Bild.

(c) Man folgere: $\mathbb{R}^n \backslash X$ hat genau zwei Zusammhangskomponenten. Diese sind gegeben durch $D_0 := \{z \in \mathbb{R}^n \backslash X\}\{W_2(X, z) = 0\}$ und $D_1 := \{z \in \mathbb{R}^n \backslash X | W_2(X, z) = 1\}$.

(d) Man zeige: $W_2(X, z) = 0$ für genügend großes z.

Tip: Wieso existiert ein Strahl der von z ausgeht und X nicht trifft?

(e) Man beweise nun den Trennungssatz von Jordan/Brouwer.

Aufgabe 3) Sei $f : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ eine glatte Abbildung.

(a) Man zeige: Es existiert eine glatte Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f((\cos(t), \sin(t))) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$ und so daß $\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi q$ für gewisses $q \in \mathbb{Z}$.

(b) Man zeige: $\deg_2(f) = q \mod 2$.

(c) Man beweise: Falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathrm{S}^1$, so gilt $\deg_2(f) = 1 \mod 2$.

Tip: Sei φ wie in (a). Man zeige: $\varphi(\pi) = g(0) + \pi q$ für gewisses $q \in \mathbb{Z}$.