Übungsblatt Nr. 6

zum 10.6.2010

Aufgabe 1)

(a) Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit. Man zeige: Das Tangentialbündel TX ist immer orientierbar.

(b) Seien X und Y orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, sei $f : X \to Y$ ein lokaler Diffeomorphismus und sei $d_p f$ an einem Punkt p aus X orientierungserhaltend. Man zeige: Dann ist f auf ganz X orientierungserhaltend.

Tip: Sei U die Menge derjenigen Punkte aus X, in denen df orientierungserhaltend ist. Dann ist U offen und abgeschlossen und außerdem nicht leer.

(c) Sei X eine kompakte, zusammenhängende Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$. Man beweise, daß X orientierbar ist.

Tip: Trennungssatz von Jordan/Brouwer

Aufgabe 2) Sei X eine zusammenhängende Mannifaltigkeit.

Definition. X heißt *einfach zusammenhängend*, falls zu je zwei glatten Wegen $c_1 : [0,1] \to X$ und $c_2 : [0,1]X$ mit $c_1(0) = c_2(0)$ und $c_1(1) = c_2(1)$ eine Abbildung $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ existiert, so daß

- $\forall t \in [0,1] : F(0,t) = c_1(t)$,
- $\forall t \in [0,1] : F(1,t) = c_2(t)$,
- $\forall s \in [0,1] : F(s,0) = c_1(0)$,
- $\forall s \in [0,1] : F(s,1) = c_1(1)$.

Mit anderen Worten, je zwei Wege mit denselben Anfangs- und Endpunkten sind homotop bei festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten. Man zeichne ein Bild!

Nun zeige: Ist X einfach zusammenhängend, so ist X orientierbar.

Aufgabe 3)

(a) Man berechne den Abbildungsgrad folgender Abbildungen:

- $\mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1\,,\ z \mapsto z^k\,,$
- $\mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1\,,\ z \mapsto \sqrt{-1}\,z\,,$
- $\mathrm{S}^k \to \mathrm{S}^k\,,\ x \mapsto -x\,.$

Hängt das Ergebnis von der gewählten Orientierung auf S^k ab?

(b) Sei X eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand und Y irgendeine orientierte Mannigfaltigkeit der selben Dimension. Man zeige: Falls Y nicht kompakt ist oder einen nicht leeren Rand besitzt, so ist der Abbildungsgrad gleich Null für jede Abbildung $f : X \to Y$.

Tip: Warum kann f nicht surjektiv sein?

(c) Seien X, Y, Z gleichdimensionale, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeiten ohne Rand und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ glatte Abbildungen. Dann gilt für die Abbildungsgrade von $g \circ f$, g und f die Formel $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

Aufgabe 4) Man zeige: Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = \mathrm{e}^{-|z|^2}$.