Übungsblatt Nr. 7

zum 17.6.2010

Aufgabe 1) Sei S^n die Euklidische Sphäre um Null in $\mathbb{R}^{n+1}$ und seien N und S der Nord- bzw. Südpol. Man zeige:

(a) $V : \mathrm{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1},\ x \mapsto \mathrm{N} - < x, \mathrm{N} > x$ definiert ein Vektorfeld auf S^n mit Nullstellen genau in S und N.

(b) Es gilt $T_\mathrm{S}\mathrm{S}^n \cong T_\mathrm{N}\mathrm{S}^n \cong \mathbb{R}^n$ (via natürlicher Identifikation). Man zeige: Dann hat man $\mathrm{d}_\mathrm{S}V = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\mathrm{d}_\mathrm{N}V = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

(c) Die Indizes von V in S und N sind durch 1 bzw. $(-1)^n$ gegeben.

Man schliesse mit Hilfe des Indexsatzes von Poincaré-Hopf: Die Euler-Charakteristik von S^n ist Null falls $n+1$ gerade ist und 2 sonst.

Aufgabe 2) (schriftlich) Seien X und Y Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Sei $Z \subset X$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit und sei $f : Z \to f(Z)$ eine Einbettung (dh. $f : Z \to Z$ ist eine injektive Immersion). Sei außerdem $\mathrm{d}_z f$ ein Isomorphismus für jedes $z \in Z$.

Beweise: Es existiert eine offene Umgebung U von Z in X, so daß $f|U$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von Y ist. Für $Z = \{p\}$ ($p \in X$ irgendein Punkt) erhält man den gewöhnlichen lokalen Umkehrsatz als Spezialfall zurück.

Tip: Angenommen, die Aussage sei falsch. Dann existieren Folgen a_n, b_n in X und ein $z \in Z$ mit $a_n \to z$ und $b_n \to z$ und so daß $f(a_n) = f(b_n)$ für jedes n gilt. Warum folgt daraus ein Widerspruch zum gewöhnlichen lokalen Umkehrsatz?

Aufgabe 3) (schriftlich) Sei X eine kompakte Mannifaltigkeit (eingebettet in $\mathbb{R}^n$). Das "Normalenbündel" von X ist definiert durch $\mathrm{N}(X) := \{(p, v) \in X \times \mathbb{R}^n \big| v \in T_pX^\perp\}$ (wobei $T_pX^\perp$ das orthogonale Komplement von T_pM in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet). Man zeige:

(a) $\mathrm{N}(X)$ ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$, $X \times \{0\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{N}(X)$ und $\pi : \mathrm{N}(X) \to X,\ (p, v) \mapsto p$ ist eine surjektive Submersion.

Tip: Sei $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^k$ eine Submersion, so daß $U := X \cap \tilde{U} = \{p \in \tilde{U} | \phi(p) = 0\}$. Dann ist für jedes $p \in U$ die Abbildung $(\mathrm{d}_p\phi)^t : \mathbb{R}^k \to T_pX^\perp$ ein linearer Isomorphismus (wobei $(\mathrm{d}_p\phi)^t$ die transponierte Abbildung zu $\mathrm{d}_p\phi$ bezeichnet) und $U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n}, (p, w) \mapsto (p, \mathrm{d}_p\phi^t\, w)$ ist eine injektive Immersion, die $\mathrm{N}(X)$ lokal parametrisiert.

(b) Sei $f : \mathrm{N}(X) \to \mathbb{R}^n,\ (p,v) \mapsto p+v$. Dann existiert eine offene Umgebung V von $X \times \{0\}$ in $\mathrm{N}(X)$, so daß $f : V \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von X in $\mathbb{R}^n$ ist.

Tip: Aufgabe 2

(c) Zu jedem $p \in \mathbb{R}^n$ sei $r(p)$ ein Punkt aus X mit minimalem Abstand zu p. Man zeige: Der Verbindungsvektor $p - r(p)$ steht senkrecht auf T_pX.

(d) Sei nun $\mathrm{N}_\epsilon(X) := \{p \in \mathbb{R}^n | \mathrm{dist}(p, X) < \epsilon\}$ die offene ϵ-Umgebung von X. Man beweise: $\mathrm{N}_\epsilon(X)$ ist eine offene Umgebung von X in $\mathbb{R}^n$, und falls ϵ klein genug ist, so ist $r(p)$ eindeutig bestimmt für jedes $p \in \mathrm{N}_\epsilon(X)$. Außerdem ist $r : \mathrm{N}_\epsilon(X) \to X$ dann eine surjektive Submersion.

Tip: Seien f und V wie in $b)$. Dann existiert $\epsilon > 0$, so daß $\mathrm{N}_\epsilon(X) \subset f(V)$. Wegen Teil c) gilt notwendigerweise $r(f(p,v)) = p$ für alle $(p,v) \in \mathrm{N}_\epsilon(X)$.

Aufgabe 4) Sei X ein topologischer Raum, sei e ein fester Punkt von X und existiere eine stetige Abbildung $* : X \times X \to X$, so daß $p * e = e * p = p$ für alle $p \in X$ gilt. Ein Beispiel hierfür sind topologische Gruppen (e ist das Einheitselement und $*$ ist die Gruppenwirkung).

Man zeige: Die Fundamentalgruppe von X ist Abelsch.

Tip: Seien α und β Schleifen in X mit Basispunkt e. Betrachte $F : [0,1] \times [0,1] \to X,\ (t,s) \mapsto \alpha(t) * \beta(s)$. Man zeichne sich ein Bild!