# Übungsblatt Nr. 8

zum 24.6.2010

**Aufgabe 1)** Sei $\mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C}$ der Kreis um Null vom Radius 1 und $\gamma_n : [0,1] \to \mathrm{S}^1$ die Schleife, die durch $\gamma_n(t) := \mathrm{e}^{2\pi n \mathrm{i} t}$ ($\mathrm{i} := \sqrt{-1}$) definiert ist. Wie in der Vorlesung sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathrm{S}^1)$ , $n \mapsto [\gamma_n]$ .

(a) Man zeige, daß $\varphi$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Man zeige, daß $\varphi$ surjektiv ist.

Tip: Ist $\alpha : [0,1] \to \mathrm{S}^1$ eine Schleife mit Basispunkt $1 \in \mathbb{C}$, so existiert genau eine stetige Kurve $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\beta(0) = 0$ und so daß $\alpha(s) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \beta(s)}$ für jedes $s \in [0,1]$ gilt. Was kann man über $\beta(1)$ sagen?

(c) Man beweise die Injektivität von $\varphi$ .

Tip: Angenommen, es existiere eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathrm{S}^1$ von der konstanten Schleife $1 \in \mathbb{C}$ zu $\gamma_n$ relativ $\{0,1\}$ . Zunächst zeige man, daß es genau eine stetige Abbildung $\hat{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $\hat{H}(0,t) = 0$ und $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \hat{H}(s,t)} = H(s,t)$ für alle $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ .

Worauf werden der linke und rechte Rand und der Boden von $H$ bzw. $\hat{H}$ abgebildet? Warum folgt $\hat{H}(1,1) = 0$ ?

**Aufgabe 2)** (schriftlich) Sei $\mathrm{S}^n$ die Euklidische Sphäre um Null in $\mathbb{R}^{n+1}$ und sei $n \geq 2$ . Man zeige: $\mathrm{S}^n$ ist einfach-zusammenhängend.

Tip: Sei $\alpha : [0,1] \to \mathrm{S}^n$ eine Schleife mit $\alpha(0) = \alpha(1)$ . Falls $\alpha$ nicht surjektiv ist, so sieht man direkt, daß $\alpha$ zur konstanten Schleife $\alpha(0)$ homotop ist. Im allgemeinen zeigt man zunächst, daß es einen stückweise differenzierbaren Weg $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, so daß $|\alpha(s) - \beta(s)| < 1$ für jedes $s \in [0,1]$ . Dann betrachte

$$\tilde{\beta} : [0,1] \to \mathrm{S}^n, \; s \mapsto \beta(s)/|\beta(s)| \, .$$

Zeige schließlich: $\tilde{\beta}$ ist homotop zu $\alpha$ und $\tilde{\beta}$ ist nicht surjektiv. Wo geht dabei $n \geq 2$ ein?

**Aufgabe 3)** Sei $X$ eine kompakte Mannifaltigkeit eingebettet in $\mathbb{R}^n$ . Man zeige: $X$ hat den Homotopietyp einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ .

Tip: Man benutze eine geignete $\epsilon$-Umgebung von $X$ in $\mathbb{R}^n$ , wie sie in Übungsblatt Nr. 7, Aufgabe 3), konstruiert wurde.

**Aufgabe 4)**

(a) Man berechne die Fundamentalgruppen des 2-dimensionalen Torus $\mathrm{T}^2$, des Möbiusbandes und des Zylinders. Desweiteren gebe man kanonische Erzeuger dieser Gruppen an.

(b) Man betrachte eine Kreislinie $K$ eingebettet in eine Fläche $F$, wie folgt:

- $F$ ist das (kompakte) Möbiusband und $K$ ist der Rand von $F$.
- $F = \mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$ und $K$ ist die Diagonale (welche explizit durch $\{(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}) | t \in [0, 2\pi]\}$ parametrisiert wird).
- $F$ ist der Zylinder und $K$ ist einer der Randkreise.

Man gebe den induzierten Gruppenhomomorphismus $\pi_1(K) \to \pi_1(F)$ in Termen von kanonischen Erzeugern dieser Gruppen an.