Übungsblatt Nr. 9

zum 1.7.2010

Aufgabe 1) Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und $f : U \to \mathbb{R}$, seien $F = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3$ glatte Abbildungen. Wie in der Vorlesung sind $\mathrm{grad} f : U \to \mathbb{R}$, $\mathrm{rot}(F) : U \to \mathbb{R}^3$ und $\mathrm{div}(F) : U \to \mathbb{R}$ der "Gradient" von f und die "Rotation" bzw. die "Divergenz" von F.

- Zeige: Es gilt $\mathrm{d}f = (\mathrm{grad} f)_1 \mathrm{d}x_1 + (\mathrm{grad} f)_2 \mathrm{d}x_2 + (\mathrm{grad} f)_3 \mathrm{d}x_3$ (wobei $(\mathrm{grad}(f))_i$ die jeweilige Komponentenfunktion von $\mathrm{grad}(f)$ bezeichnet).
- Setze $\omega := f_1 \mathrm{d}x_1 + f_2 \mathrm{d}x_2 + f_3 \mathrm{d}x_3$; dann ist also ω eine 1-Form auf U. Zeige: $\mathrm{d}\omega = \mathrm{rot}(F)_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \mathrm{rot}(F)_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{rot}(F)_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ (wobei $(\mathrm{rot}(F))_i$ die jeweilige Komponentenfunktion von $\mathrm{rot}(F)$ bezeichnet).
- Sei nun $\omega := f_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - f_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + f_3 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$; dann ist ω eine 2-Form auf U. Zeige: $\mathrm{d}\omega = \mathrm{div}(F) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.
- Man zeige: $\mathrm{d}^2 = 0$ ist equivalent zu $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$ und $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$ auf $\Omega^*(U)$.

Aufgabe 2) Man zeige: Ist $e_1, \ldots, e_k$ eine Basis von V und ist $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ die duale Basis, so ist $\{\epsilon_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p}\}_{i \in I_n^p}$ eine Basis von $\Lambda^p V$. Dabei bezeichne I_n^p die Menge aller "Multiindizes" $\{(i_1, \ldots, i_p) | 1 \leq i_1 < \cdots i_p \leq k\}$. Welche Dimension hat $\Lambda^p V$?

Aufgabe 3) (schriftlich) Sei X eine glatte Mannifaltigkeit. Man zeige: X ist wegweise-zusammenhängend genau dann, wenn X zusammenhängend ist.

Aufgabe 4) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis und $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ die duale Basis.

(a) Zeige: Es gibt genau einen linearen Operator $\mathrm{d} : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ mit:

- $\mathrm{d}(\Omega^p(U)) \subset \Omega^{p+1}(U)$ für jedes p.
- $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\epsilon_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\epsilon_n$ für alle $f \in \Omega^0(U)$.
- $\mathrm{d}^2 = 0$.
- $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2$ für alle $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ und $\omega_2 \in \Omega^q(U)$.

(b) Sei $\tilde{U}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ und $f : \tilde{U} \to U$ eine glatte Abbildung. Dann hat man $f^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d} f^* \omega$ für jedes $\omega \in \Omega^*(U)$.