Übungsblatt Nr. 10

zum 8.7.2010

Aufgabe 1) Sei $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Ketten-Komplexen. Zeige, daß der in der Vorlesung definierte "Rand-Operator" $\partial_q^* : \mathrm{kern}(\mathrm{d}_C^q) \to H^{q+1}(A)$ alle "Ränder" auf Null abbildet (d.h. $\partial_q^* \circ \mathrm{d}_C^{q-1} = 0$) und daher eine Abbildung $\partial_q^* : H^q(C) \to H^{q+1}(A)$ induziert.

Aufgabe 2) Sei $C^\bullet$ ein endlicher Ketten-Komplex (d.h. $C^n = 0$ für großes n) mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $\dim(C^n) < \infty$ für alle n. Zeige: Die ganze Zahl $\sum_{i=0}^\infty (-1)^i \dim(C^i)$ ist gleich der "Euler-charakteristik" $\sum_{i=0}^\infty (-1)^i \dim(H^i(C))$.

Aufgabe 3) Seien A_i, B_i, C_i, D_i, E_i $(i = 1, 2)$ Vektorräume und sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & E_1 \\
{\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\epsilon}\big\downarrow \\
A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & E_2
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Zeige: Sind α, β, δ und ϵ jeweils Isomorphismen, so ist automatisch auch γ ein Isomorphismus. Man kann sogar mehr sagen:

- Sind β und δ injektiv und ist α surjektiv, so ist γ injektiv.
- Sind β und δ surjektiv und ist ϵ injektiv, so ist γ surjektiv.

Dieses Resultat wird auch das "Fünfer-Lemma" genannt.

Aufgabe 4) Sei X eine Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X. Seien geschlossene p-Formen ω_{ij} auf $U_{ij} := U_i \cap U_j$ gegeben (d.h., $\mathrm{d}\omega_{ij} = 0$). Zeige:

(a) Folgendes ist äquivalent:
  - Es existieren jeweils p-Formen ξ_i auf U_i, so daß auf U_{ij} die Gleichung $\xi_j - \xi_i = \omega_{ij}$ gilt.
  - Es gilt die "Cozykel-Bedingung" $\omega_{ij} + \omega_{jk} = \omega_{ik}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$.

(b) Die $p + 1$-Formen $\mathrm{d}\xi_i$ "verkleben" sich zu einer globalen $p + 1$-Form η auf X (d.h., $\eta|U_i = \mathrm{d}\xi_i$).

(c) Die Kohomologie-Klasse von η hängt nicht von der Wahl der ξ_i ab.