Übungsblatt Nr. 11

zum 15.7.2010

Aufgabe 1) Man veranschauliche sich folgende, auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definierte Differentialformen mit Hilfe von "Stromlinien" (vgl. M. Zirnbauer, Elektrodynamik, Skript, Kap. 0.19; zu finden unter http://www.thp.uni-koeln.de/thphysik/Eddy.ps.gz)

(a) Seien x und y die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^2$. Betrachte $\mathrm{d}x \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ die "Winkelfunktion". Dann ist φ lokal zwar nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt, trotzdem ist $\tau := \mathrm{d}\varphi$ eine wohldefinierte, geschlossene 1-Form auf U.

(c) Seien x, y und z die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^3$. Man veranschauliche sich $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(d) Man finde eine anschauliche Erklärung dafür, dass die Kohomologieklassen der jeweiligen Differentialformen im Fall (a) und (c) trivial sind, im Fall (b) dagegen nicht.

Aufgabe 2) Existieren offene, zusammenhängende Teilmengen U, V des $\mathbb{R}^2$ so daß $\mathbb{R}^2 = U \cup V$ und so daß $U \cap V$ nicht zusammenhängend ist ?

Aufgabe 3) Seien p und q Punkte des $\mathbb{R}^n$ mit $p \neq q$. Wir sagen, daß eine abgeschlossene Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ die Punkte p und q *separiert*, falls p und q in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus A$ liegen.

Seien nun A, B abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und p, q zwei unterschiedliche Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$. Zeige: Falls weder A noch B die Punkte p und q separiert, so gilt dies auch für $A \cup B$.

Aufgabe 4) Seien $p_1, \ldots, p_k$ unterschiedliche Punkte des $\mathbb{R}^n$. Zeige:

$$\mathrm{H}^d(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^k & \text{for } d = n-1 \\ \mathbb{R} & \text{for } d = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

Wie läßt sich dieses Ergebnis anschaulich erklären?