Übungsblatt Nr. 12

zum 22.7.2010

Aufgabe 1) Sei $0 < \epsilon < 1$ und $U_+ := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} > -\epsilon\}$ bzw. $U_- := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} < \epsilon\}$. Man berechne nun die Kohomologie der Euklidischen Sphäre S^n mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz (für glatte Mannigfaltigkeiten), die durch die Überdeckung $\mathrm{S}^n = U_1 \cup U_2$ mit $U_1 := U_+ \cap \mathrm{S}^n$ und $U_2 := U_- \cap \mathrm{S}^n$ gegeben ist. Man zeige so noch einmal: $\dim(\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^n)) = 1$, $\dim(\mathrm{H}^p(\mathrm{S}^n)) = 0$ falls $0 < p < n$ und $\dim(\mathrm{H}^n(\mathrm{S}^n)) = 1$

Aufgabe 2) Sei $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ der reell projektive Raum und $\tau : \mathrm{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion. Des weiteren sei $i : \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$ die Antipodenabbildung.

(a) Zeige: Es existiert eine Zerlegung $\Omega^*(\mathrm{S}^n) = \Omega^*(\mathrm{S}^n)_+ \oplus \Omega^*(\mathrm{S}^n)_-$ in Differential-Komplexe, so daß $i^*\omega = \pm\,\omega$ falls $\omega \in \Omega^*(\mathrm{S}^n)_\pm$. Dies induziert in natürlicher Weise eine Spaltung $\mathrm{H}^p(\mathrm{S}^n) = \mathrm{H}^p(\mathrm{S}^n)_+ \oplus \mathrm{H}^p(\mathrm{S}^n)_-$.

(b) Es gilt: $\dim(\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^n)_+) = 1$, $\dim(\mathrm{H}^p(\mathrm{S}^n)_+) = 0$ falls $0 < p < n$ und $\dim(\mathrm{H}^n(\mathrm{S}^n)_+) = 0$ falls n gerade ist und $\dim(\mathrm{H}^n(\mathrm{S}^n)_+) = 1$ anderenfalls.

(c) Die natürliche Abbildung $\tau^* : \Omega^*(\mathrm{P}^n) \to \Omega^*(\mathrm{S}^n)_+$ induziert einen Isomorphismus $\mathrm{H}^p(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathrm{H}^p(\mathrm{S}^n)_+$.

(d) Man berechen die Kohomologie des $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Aufgabe 3) Sei $r : R^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ die Abbildung $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Man berechne $\omega := r^*\mathrm{vol}_{S^{n-1}}$ und zeige, dass ω eine geschlossene Form auf $R^n \setminus \{0\}$ ist, deren Einschränkung auf S^{n-1} mit $\mathrm{vol}_{S^{n-1}}$ übereinstimmt.

Weiter zeige man, dass die Kohomologieklasse von ω in $\mathrm{H}^{n-1}(R^n \setminus \{0\})$ von Null verschieden ist.

Aufgabe 4) Sei $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ die kanonische Projektion und $\omega \in \Omega^{n-1}(R^n \setminus \{0\})$ wie in Aufgabe 3. Desweiteren sei U_1 , U_2 die offene Überdeckung der S^n aus Aufgabe 1. Betrachte $\eta := \pi^*\omega | U_1 \cap U_2$; dann ist also η eine geschlossene $n-1$-Form auf $U_1 \cap U_2$ deren Einschränkung auf S^{n-1} mit $\mathrm{vol}_{S^{n-1}}$ übereinstimmt.

Man zeige: Der Randoperator $\partial^* : \mathrm{H}^{n-1}(U_1 \cap U_2) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{S}^n)$ bildet die Kohomologieklasse von η auf die Kohomologieklasse von $c\,\mathrm{vol}_{S^n}$ ab mit der Konstanten $c = \frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1})}{\mathrm{Vol}(S^n)}$ (wobei $\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^n)$ das Volumen von S^n bezeichne, also $\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^1) = 2\pi$, $\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^2) = 4\pi$ u.s.w.).