Übungsblatt Nr. 3

schriftlich zum 12.5.2010, Abgabe in der Vorlesung

Aufgabe 1) Seien X und Y glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und gelte $m < n$. Man zeige: Es gibt keine surjektive glatte Abbildung von X nach Y.

Tip: Satz von Sard

Aufgabe 2) Man zeige: Ist $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k und gilt dabei $2k \leq n$, so existiert eine Hyperebene H^n des $\mathbb{R}^{n+1}$ so daß die Orthogonalprojektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to H^n$ durch Einschränkung auf X eine Immersion $X \to H^n$ induziert. Insbesondere existiert also zu jeder kompakten Mannigfaltigkeit der Dimension k eine eigentliche Immersion in den $\mathbb{R}^{2k}$.

Tip: Sei TX das "Tangentialbündel" von X und $f : TX \to \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Abbildung $(p, v) \mapsto v$. Damit wende man Aufgabe 1) an – welche Dimension hat TX?

Aufgabe 3) Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann heißt diese Überdeckung *lokal endlich* falls jeder Punkt von X eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der U_i's schneidet.

Man zeige: Jede Überdeckung von X besitzt eine lokal endliche Verfeinerung.

Tip: Zerlegung der Eins

Aufgabe 4) Man zeige: Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit und sind Y und Z glatte Untermannigfaltigkeiten von X, so existiert eine glatte Funktion $\phi : X \to \mathbb{R}$ mit $\phi|_Y \equiv 0$ und $\phi|_Z \equiv 1$.

Tip: Wie in Aufgabe 3)