KOMPLEXE KONTAKTSTRUKTUREN UND KÄHLERSCHE KILLINGSPINOREN

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat.

eingereicht am

Institut für Mathematik
der Humboldt–Universität zu Berlin

von
Dipl.–Math. Uwe Semmelmann
geboren am 6.1.1965 in Berlin

Präsidentin der Humboldt–Universität zu Berlin:
Frau Prof. Dr. M. Dürkop

Dekan der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Herr Prof. Dr. K. Gröger

Gutachter

1. ....
2. ....
3. ....

Tag der mündlichen Prüfung: ....

INHALTSVERZEICHNIS

0. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird der Dirac–Operator auf kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeiten untersucht. Im Mittelpunkt steht die Untersuchung des Zusammenhangs von komplexen Kontaktstrukturen und Kählerschen Killing–Spinoren, d.h. Eigenspinoren des Dirac–Operators zum kleinstmöglichen Eigenwert. Insbesondere werden eine Reihe neuer Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit solchen Spinoren angegeben.

Sei (M^n, g) eine kompakte Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung R. Für die Eigenwerte λ des Dirac–Operators bewies Th. Friedrich (siehe [Fri80]) die Ungleichung

$$\lambda^2 \quad \geq \quad \frac{n}{4(n-1)}\, R_0. \tag{0.1}$$

Dabei bezeichnet R_0 das Minimum der Skalarkrümmung auf M. Ist $\lambda = \pm\sqrt{\frac{n}{4(n-1)}\, R_0}$ ein Eigenwert des Dirac–Operators, so erfüllt der zugehörige Eigenspinor ϕ eine stärkere Differentialgleichung. Für beliebige Vektorfelder X gilt

$$\nabla_X \phi \quad = \quad \mu\, X \cdot \phi \tag{0.2}$$

mit $\mu = \lambda/n$. Eigenspinoren zum kleinstmöglichen Eigenwert sind also Killing–Spinoren zur Killing–Zahl μ. Aus der Existenz von Killing–Spinoren folgt, daß (M, g) eine irreduzible Einstein–Mannigfaltigkeit der Skalarkrümmung $R = 4n(n-1)\,\mu^2$ ist. Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Killing–Spinoren wurden in den letzten Jahren ausgiebig untersucht (siehe z.B. [Bau89], [BFGK90]) und in der Arbeit [Bär93] im einfach zusammenhängenden Fall vollständig beschrieben. Insbesondere zeigt sich dabei ein Zusammenhang zwischen Killing–Spinoren und Einstein–Sasaki–Strukturen, d.h. reellen Kontaktstrukturen, die einer gewissen Normalitätsbedingung genügen. Diese Beziehung wurde erstmalig von Th. Friedrich und I. Kath in [FK90] untersucht. Sie geben dort ein Konstruktionsprinzip an, das die Existenz von Killing–Spinoren auf einfach zusammenhängenden Einstein–Sasaki–Mannigfaltigkeiten beweist.

Es zeigt sich, daß auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten analoge Begriffe eingeführt werden können, und eine sehr ähnliche Konstruktion möglich ist.
Sei (M^{2m}, g, J) eine geschlossene Kählersche Mannigfaltigkeit. Dann zeigt man (siehe [Lic87] bzw. [Hij86]), daß es auf M keine Killing–Spinoren geben kann. Es muß somit eine größere untere Schranke für das Spektrum des Dirac–Operators existieren.

In den Arbeiten [Kir86], [Kir88] und [Kir91] untersuchte K.D. Kirchberg die Eigenwerte des Dirac–Operators auf kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung. Er bewies die folgende untere Abschätzung:

$$\lambda^2 \quad \geq \quad \frac{m+1}{4m}\, R_0. \tag{0.3}$$

Die veränderte Form der Abschätzung hängt auch damit zusammen, daß sich für Kählersche Mannigfaltigkeiten die Strukturgruppe auf $U(m)$ reduziert und man eine weitere Aufspaltung des Spinorbündels S in eine Summe holomorpher Unterbündel erhält.
Es gilt $S = S_0 \oplus \ldots \oplus S_m$, wobei S_r ein Bündel vom komplexen Rang $\binom{m}{r}$ ist.

Wie im Fall Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist man wieder daran interessiert, Kählersche Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren, für die der Dirac–Operator seinen kleinstmöglichen Eigenwert annimmt. In dieser Situation ist (M^{2m}, g, J) eine Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit ungerader komplexer Dimension $m = 2k+1$.
Der Eigenspinor ψ zum Eigenwert $\lambda = \pm\sqrt{\frac{m+1}{4m} R_0}$ ist ein Schnitt in $S_k \oplus S_{k+1}$, d.h. $\psi = \psi_k + \psi_{k+1}$, und die Komponenten genügen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla_X \psi_k &= -\mu\, \bar{p}(X)\, \psi_{k+1} \\ \nabla_X \psi_{k+1} &= -\mu\, p(X)\, \psi_k. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Dabei bezeichnet p die Projektion auf das holomorphe Tangentialbündel, d.h.
$p(X) := \frac{1}{2}(X - iJX)$ und $(m+1)\lambda = \mu$. In Analogie zu den Killing–Spinoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten bezeichnet man Spinoren $\psi = \psi_k + \psi_{k+1}$, die den Differentialgleichungen (0.4) für beliebiges μ genügen, als Kählersche Killing–Spinoren.

Eine etwas modifizierte Form der Ungleichung (0.3) gilt für Kählersche Mannigfaltigkeiten gerader komplexer Dimension (siehe [Kir91]). Man zeigt

$$\lambda^2 \geq \frac{m}{4(m-1)} R_0. \tag{0.5}$$

Nach einem Theorem von A. Lichnerowicz (siehe [Lic90]) sind alle geschlossenen Kählerschen Mannigfaltigkeiten gerader komplexer Dimension m mit $m \geq 4$, auf denen der Dirac–Operator seinen kleinstmöglichen Eigenwert annimmt, von der Form $N \times T^2$. Dabei ist T^2 der zweidimensionale Torus und N eine Kählersche Mannigfaltigkeit (ungerader komplexer Dimension), auf der Kählersche Killing–Spinoren existieren. Im Fall $m = 2$ wurde von Th. Friedrich gezeigt, daß $S^2 \times T^2$ und $S^2 \times S^2$ die einzigen Mannigfaltigkeiten sind, für die $\sqrt{\frac{1}{2} R_0}$ im Spektrum des Dirac–Operators liegt (siehe [Fri93]).

Die Untersuchung von geschlossenen Kählerschen Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung, auf denen der Dirac–Operator seinen kleinstmöglichen Eigenwert annimmt, ist also äquivalent zur Untersuchung von Mannigfaltigkeiten mit Kählerschen Killing–Spinoren. In der komplexen Dimension 3 wurden diese von K.D. Kirchberg vollständig klassifiziert (siehe [Kir88]). Jede dieser Mannigfaltigkeiten ist isomorph zum komplex–projektiven Raum $\mathbb{C}P^3$ oder zur Flaggenmannigfaltigkeit $F(1,2)$. Die einzigen weiteren bekannten Beispiele waren bisher die komplex–projektiven Räume ungerader Dimension.

Ein wichtiges Resultat der vorliegenden Arbeit ist der folgende Satz (4.2).
Satz *Sei (M, g, J) eine geschlossene Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$ (k ungerade) mit positiver Skalarkrümmung. Besitzt M eine komplexe Kontaktstruktur, so ist M eine Spin–Mannigfaltigkeit, und es existiert auf M ein Kählerscher Killing–Spinor.*

Als Folgerung erhält man daraus verschiedene neue Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit Kählerschen Killing–Spinoren.

Folgerung *Auf den folgenden kompakten homogenen Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeiten existieren Kählerschen Killing–Spinoren:*

- $SU(n+2)/S(U(n)\times U(1)\times U(1))$,
- $SO(n+4)/S(O(n)\times O(3)\times O(2))$,
- $F_4/Sp(3)U(1)$,

wobei n als ungerade vorausgesetzt ist. Die Mannigfaltigkeit $F_4/Sp(3)U(1)$ ist komplex 15–dimensional.

Es soll jetzt kurz der Inhalt der einzelnen Kapitel angegeben werden.
Im ersten Kapitel werden die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften zusammengestellt, die den Dirac–Operator auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten und Kählersche Killing–Spinoren charakterisieren.
Im zweiten Kapitel wird die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren auf einer Serie von $SU(n)$–Flaggenmannigfaltigkeiten bewiesen. Benutzt wird dazu die explizite Berechnung des homogenen Levi–Civita–Zusammenhangs und die Darstellung der Spinorfelder als Funktionen auf der Gruppe $SU(n)$ mit Werten im Spinormodul.
Das dritte Kapitel enthält die Einführung des Begriffs der komplexen Kontaktstruktur. Es werden die wichtigsten Eigenschaften angegeben. Außerdem wird die Klassifikation der homogenen komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten beschrieben. Dabei zeigt sich, daß die im zweiten Kapitel durchgeführten Rechnungen auf jede dieser Mannigfaltigkeiten übertragbar sind.
Im vierten Kapitel wird eine Verallgemeinerung der komplexen Kontaktstrukturen betrachtet. Es wird gezeigt, daß auf solchen Mannigfaltigkeiten unter gewissen Voraussetzungen Kählersche Killing–Spinoren existieren. Diese werden direkt aus der Kontaktstruktur konstruiert und liefern auf komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten (im üblichen Sinne) Kählersche Killing–Spinoren.
Im fünften Kapitel werden normale komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten betrachtet. Diese stellen ein komplexes Analogon zu den Einstein–Sasaki–Mannigfaltigkeiten dar. Hier läßt sich die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren auf eine Art zeigen, die der schon erwähnten Konstruktion in [FK90] sehr ähnlich ist.
Der erste Anhang enthält zwei Realisierungen des Spinormoduls, die in der Arbeit benutzt werden.
Im zweiten Anhang wird noch einmal der Beweis der Spektrumsabschätzung des Dirac–Operators auf geschlossenen Kählerschen Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung gegeben. Der hier vorgestellte Beweis, der im Prinzip in den Arbeiten [Kir93], [Kir86] bzw. [Hij94] enthalten ist, soll die Analogie zum reellen Fall verdeutlichen, wo man ebenfalls unter Benutzung des Twistor–Operators und seines adjungierten Operators die entsprechende Abschätzung des Spektrums beweisen kann.
Der dritte Anhang enthält die Berechnung des Spektrums des Dirac–Operators auf dem

komplex–projektiven Raum.
Der fünfte Anhang ist völlig unabhängig von der übrigen Arbeit. In ihm wird der Rarita–Schwinger–Operator untersucht. Dieser Operator ist definiert als der mit dem Tangentialbündel getwistete Dirac–Operator. Im ersten Abschnitt werden seine wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt. Danach wird sein Spektrum auf der Sphäre mit Hilfe des Lichnerowicz–Laplace–Operators interpretiert und sein Spektrum auf dem komplex–projektiven Raum berechnet. Im letzten Abschnitt wird der in der Weitzenböck–Formel auftretende Endomorphismus Q untersucht. Der kleinste Eigenwert von Q wird mit Hilfe des kleinsten Eigenwertes des Krümmungsendomorphismus abgeschätzt. Damit erhält man eine untere Schranke für das Spektrum des Rarita–Schwinger–Operators.

Während des Aufschreibens dieser Arbeit erfuhr ich von Prof. J.P. Bourguignon, daß A. Moroianu die vollständige Beschreibung kompakter Kählerscher Mannigfaltigkeiten mit (reellen) Kählerschen Killing–Spinoren gelungen ist (siehe [Mor94]). Eine kurze Erläuterung dieser Beschreibung und der sich daraus für diese Arbeit ergebenden Folgerungen enthält der vierte Anhang.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meiner Betreuerin Prof. H. Baum bedanken, die mich immer wieder ermutigte, am gewählten Thema festzuhalten, und mich besonders bei der Untersuchung des Rarita–Schwinger–Operators mit wertvollen Hinweisen unterstützte.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Th. Friedrich, der mich schon während des Studiums durch interessante Vorlesungen und Vorträge für das Forschungsgebiet begeisterte und dessen Arbeiten für mich eine wichtige Grundlage waren.

Ganz herzlich möchte ich mich bei meinem Kollegen Dr. K.-D. Kirchberg für die entgegenkommende und freundliche Zusammenarbeit bedanken. Seine Hinweise und Anregungen waren für den Hauptteil der Arbeit entscheidend.

1. Der Dirac–Operator auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften eingeführt werden, die den Dirac–Operator auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten beschreiben. Eine ausführlichere Darstellung dieser Grundlagen findet man z.B. in den Arbeiten [Kir93], [Kir86] oder [Hij94].

1.1. Spinorbündel und Dirac–Operator einer Kählerschen Spin–Mannigfaltigkeit.

Sei (M, g, J) eine Kählersche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension m mit Riemannscher Metrik g und komplexer Struktur J. Die Kähler–Bedingung ist äquivalent zu $\nabla J = 0$, wobei ∇ die zum Levi–Civita–Zusammenhang assoziierte kovariante Ableitung bezeichnet. Definiert man die Kähler–Form Ω durch $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$, so ist $\nabla J = 0$ aufgrund von $\nabla g = 0$ auch äquivalent zu $\nabla\Omega = 0$ bzw. zu $d\Omega = 0$.

Setzt man die komplexe Struktur komplex–linear auf $TM^{\mathbb{C}}$ fort, so definiert sie die Zerlegung $TM^{\mathbb{C}} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1}$, die der Aufspaltung in die $(\pm\, i)$–Eigenräume von J entspricht und invariant unter ∇ ist. Analog hat man die Zerlegung der komplexen 1-Formen in (1,0)-Formen und (0,1)-Formen, d.h. $(T^*M)^{\mathbb{C}} = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M$.

Sei jetzt $\{e_i\}_{i=1,\dots,2m}$ eine lokale orthonormale Basis in TM mit $Je_{2k-1} = e_{2k}$, dann ist $\{\mathrm{f}_k\}_{k=1,\dots,m}$ mit $\mathrm{f}_k := \frac{1}{2}(e_{2k-1} - ie_{2k})$ eine lokale Basis in $TM^{1,0}$ und $\{\bar{\mathrm{f}}_k\}_{k=1,\dots,m}$ mit $\bar{\mathrm{f}}_k := \frac{1}{2}(e_{2k-1} + ie_{2k})$ entsprechend in $TM^{0,1}$. Bezeichne $\{e^i\}$ die zu $\{e_i\}$ duale Basis in T^*M, (d.h. $e^i(e_j) = \delta_{ij}$), so definiert man durch $\mathrm{f}^{\,k} := (e^{2k-1} + ie^{2k}) \in \Lambda^{1,0}M$ und $\bar{\mathrm{f}}^{\,k} := (e^{2k-1} - ie^{2k}) \in \Lambda^{0,1}M$ die zu $\{\mathrm{f}_k\}$ bzw. $\{\bar{\mathrm{f}}_k\}$ dualen Basen. Setzt man die Metrik g komplex–linear auf $TM^{\mathbb{C}}$ fort, so folgt:

$$\begin{aligned} g(\mathrm{f}_i, \mathrm{f}_j) &= g(\bar{\mathrm{f}}_i, \bar{\mathrm{f}}_j) = 0, \\ g(\mathrm{f}_i, \bar{\mathrm{f}}_j) &= g(\bar{\mathrm{f}}_i, \mathrm{f}_j) = \tfrac{1}{2}\,\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Für beliebige Vektorfelder X, Y aus $TM^{\mathbb{C}}$ definiert man $g(X)(Y) := g(X, Y)$ und erhält dadurch die Isomorphien $g : TM^{1,0} \xrightarrow{\sim} \Lambda^{0,1}M$ bzw. $g : TM^{0,1} \xrightarrow{\sim} \Lambda^{1,0}M$, insbesondere gilt:

$$g(\mathrm{f}_k) = \tfrac{1}{2}\,\bar{\mathrm{f}}^{\,k} \quad \text{und} \quad g(\bar{\mathrm{f}}_k) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{f}^{\,k}.$$

Auf M sei jetzt die Existenz einer Spinstruktur vorausgesetzt. Im Fall komplexer Mannigfaltigkeiten ist dies äquivalent zu $c_1(M) \equiv 0(2)$ bzw., für Kähler–Mannigfaltigkeiten, zur Existenz einer Wurzel des kanonischen Bündels $K = \Lambda^{m,0}M$, d.h. es existiert ein holomorphes Linienbündel L mit $K \cong L \otimes L$ ([Hit74]).

Sei P_{Spin} das Spin(2m)-Hauptfaserbündel der Spinstruktur, dann ist das Spinorbündel S wie im Fall Riemannscher Mannigfaltigkeiten gegeben als assoziiertes Vektorbündel $S = P_{Spin} \times_{Spin(2m)} \Delta$, wobei Δ den Spinormodul bezeichnet (zur Realisierung von Δ siehe Anhang A). Glatte Schnitte in S werden als Spinorfelder bezeichnet.

Die Clifford-Multiplikation, $\mu : S \otimes TM \to S$, mit $\mu(\psi \otimes X) = X \cdot \psi$, ist der Bündelmorphismus, der faserweise definiert ist durch die Clifford-Multiplikation auf dem Spinormodul. Sie setzt sich fort zu einer Multiplikation mit k-Formen. Jede k-Form ω wirkt damit als Endomorphismus des Spinorbündels, der lokal gegeben ist durch:

$$\omega \cdot \psi \quad = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq 2m} \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\, e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \cdot \psi. \tag{1.1}$$

Insbesondere gilt für eine 1-Form ξ, daß $\xi \cdot \psi = g^{-1}(\xi) \cdot \psi$. Im weiteren sind die folgenden Eigenschaften der Clifford–Multiplikation wichtig:

$$X \cdot Y + Y \cdot X = -2g(X,Y)\,\mathrm{Id}_S, \tag{1.2}$$
$$\xi \cdot \omega = \xi \wedge \omega - \xi \lrcorner\, \omega, \tag{1.3}$$
$$\omega \cdot \xi = \omega \wedge \xi + (-1)^k \xi \lrcorner\, \omega, \tag{1.4}$$
$$(X \cdot \phi, \psi) = -(\phi, X \cdot \psi). \tag{1.5}$$

Dabei sind X, Y Vektorfelder, ξ eine 1-Form, ω eine k-Form und ψ ein Spinorfeld auf M. Außerdem bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ das hermitesche Skalarprodukt auf S, daß induziert wird vom kanonischen hermiteschen Skalarprodukt auf dem Spinormodul.

Der Levi–Civita–Zusammenhang ∇ auf (M, g) induziert eine kovariante Ableitung im Spinorbündel, die wieder mit ∇ bezeichnet wird. Lokal ist $\nabla : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S \otimes TM)$ gegeben durch:

$$\nabla_X \phi \quad = \quad X(\phi) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k < l \leq 2m} \omega_{kl}(X)\, e_k \cdot e_l \cdot \phi,$$

wobei $\omega_{kl} = g(\nabla e_k, e_l)$ die Zusammenhangsformen von ∇ bezüglich der lokalen orthonormalen Basis $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ sind. Für die Spinorableitung ∇ sind die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\nabla_X(\omega \cdot \psi) = \nabla_X \omega \cdot \psi + \omega \cdot \nabla_X \psi, \tag{1.6}$$
$$X(\phi, \psi) = (\nabla_X \phi, \psi) + (\phi, \nabla_X \psi). \tag{1.7}$$

Der Dirac–Operator D ist definiert als die Hintereinanderausführung von kovarianter Ableitung und Clifford-Multiplikation und läßt sich lokal ausdrücken als $D = \sum_{i=1}^{2m} e_i \cdot \nabla_{e_i}$.

Die Besonderheit der Kählerschen Spin–Mannigfaltigkeiten in Bezug auf die Spektraleigenschaften des Dirac–Operators beruhen im wesentlichen darauf, daß man eine weitere Aufspaltung des Spinorbündels hat, die verträglich mit der kovarianten Ableitung ist. Zur Definition dieser Aufspaltung betrachtet man die Kähler–Form Ω als Endomorphismus des

Spinorbündels, der lokal gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}\Omega &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2m} J(e_i)e_i \cdot \\ &= -\sum_{k=1}^{m} e_{2k-1}e_{2k} \cdot \\ &= 2i\sum_{k=1}^{m} \mathrm{f}_k \cdot \bar{\mathrm{f}}_k \cdot \; + \; i\, m\, \mathrm{Id}_S\, .\end{aligned} \tag{1.8}$$

Man rechnet leicht nach, daß Ω faserweise die Eigenwerte $\mu_r = i(m-2r)$ mit der Vielfachheit $\binom{m}{r}$ hat, für $r = 0, \ldots, m$ (siehe Anhang A). Definiert man jetzt Unterbündel S_r derart, daß $(S_r)_x$ für alle $x \in M$ mit dem Eigenraum zum Eigenwert μ_r des Endomorphismus $\Omega : S_x \to S_x$ übereinstimmt, so zerfällt das Spinorbündel in die folgende orthogonale direkte Summe:

$$S \;=\; S_0 \oplus \ldots \oplus S_m. \tag{1.9}$$

Der komplexe Rang des Unterbündels S_r ist $\binom{m}{r}$, und die kovariante Ableitung erhält die Aufspaltung (1.9), aufgrund von $\nabla\Omega = 0$.

Im Spinorbündel S existiert eine natürliche antiunitäre Bündelabbildung $j : S \longrightarrow S$. Diese hat die folgenden Eigenschaften:

$$j^2 = (-1)^{\frac{m(m+2)}{2}}, \tag{1.10}$$

$$j(S_r) = S_{m-r}, \tag{1.11}$$

$$j(X \cdot \phi) = X \cdot (j\phi) \qquad \text{für} \quad X \in \Gamma(TM) \tag{1.12}$$

$$j(Z \cdot \phi) = \bar{Z} \cdot (j\phi) \qquad \text{für} \quad Z \in \Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \tag{1.13}$$

$$\nabla j = 0. \tag{1.14}$$

Um die Existenz einer solchen Struktur zu beweisen, definiert man zunächst auf dem Spinormodul eine entsprechende Abbildung $j : \Delta \longrightarrow \Delta$ und setzt diese dann faserweise auf S fort. Bezüglich der Basis $\{u(\varepsilon)\}$ des Spinormoduls (siehe Anhang A) ist j definiert durch:

$$j(u(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) \quad = \quad i^{\,c(\varepsilon)}u(-\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_m),$$

mit $c(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{m} k\varepsilon_k$.

Für die Clifford-Multiplikation gilt:

$$\begin{aligned}\mu : TM^{1,0} \otimes S_r \to S_{r+1} \\ \mu : TM^{0,1} \otimes S_r \to S_{r-1}\end{aligned} \tag{1.15}$$

für $r = 1, \ldots, m-1$. Außerdem gilt $\mu|_{TM^{1,0}\otimes S_m} = 0$ und $\mu|_{TM^{0,1}\otimes S_0} = 0$.

Die kovariante Ableitung im Spinorbündel ist die Summe einer (1,0)–Komponente ∇^- und einer (0,1)–Komponente ∇^+, d.h. $\nabla = \nabla^- + \nabla^+$, wobei $\nabla^\pm$ lokal gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \nabla^- \psi &= \sum_{i=1}^m \nabla_{\mathrm{f}_i} \psi \otimes \mathrm{f}^i, \\ \nabla^+ \psi &= \sum_{i=1}^m \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} \psi \otimes \bar{\mathrm{f}}^i. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Mit diesen Bezeichnungen kann man Dirac–Operatoren $D_\pm$ definieren, die der Aufspaltung (1.9) angepaßt sind:

$$D_\pm := \mu \circ \nabla^\pm : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S). \tag{1.17}$$

Lokal haben diese Operatoren die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} D_+ &= \sum_{i=1}^m \bar{\mathrm{f}}^i \cdot \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} &&= 2 \sum_{i=1}^m \mathrm{f}_i \cdot \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i}, \\ D_- &= \sum_{i=1}^m \mathrm{f}^i \cdot \nabla_{\mathrm{f}_i} &&= 2 \sum_{i=1}^m \bar{\mathrm{f}}_i \cdot \nabla_{\mathrm{f}_i}. \end{aligned}$$

Da $\nabla^\pm$ die Aufspaltung erhält, ergibt sich unmittelbar aus (1.15)

$$D_\pm(\Gamma(S_r)) \quad \subset \quad \Gamma(S_{r\pm 1}).$$

Die folgenden Eigenschaften der Operatoren $D_\pm$ erhält man durch einfache Rechnungen:

$$D = D_+ + D_-, \tag{1.18}$$

$$D^2 = D_+ D_- + D_- D_+, \tag{1.19}$$

$$[D_+, \Omega] = 2i\, D_+, \tag{1.20}$$

$$[D_-, \Omega] = -2i\, D_-, \tag{1.21}$$

$$[D^2, \Omega] = 0. \tag{1.22}$$

Auf Kählerschen Spin–Mannigfaltigkeiten definiert die Clifford-Multiplikation mit Formen einen kanonischen unitären Isomorphismus

$$\alpha_r : \quad \Lambda^{0,r} M \otimes S_0 \xrightarrow{\sim} S_r \tag{1.23}$$

für $r = 0, \ldots, m$. Das Spinorbündel ist also isomorph zu $\Lambda^{0,*} M \otimes S_0$, und es zeigt sich, daß S_0 eine Wurzel des kanonischen Bündels ist, die der fixierten Spinstruktur entspricht (siehe [Kir86]).

Diese Isomorphie zeigt, daß die Unterbündel S_r des Spinorbündels S holomorphe Vektorbündel sind. Insbesodere ist der vom Levi–Civita–Zusammenhang in S_r induzierte Zusammenhang gerade der kanonischen Zusammenhang. Für das Linienbündels S_0 folgt damit

$$\nabla_X \Psi_0 \;=\; \partial \log |\Psi_0|^2 (X)\, \Psi_0 \tag{1.24}$$

für beliebige Vektorfelder X und lokale holomorphe Schnitte Ψ_0 in S_0.

Weiter liefert α eine Beziehung zwischen den Operatoren D_+, D_- und $\bar\partial, \bar\partial^*$ (siehe [Kir93]). So gilt z.B.:

$$D_+(\,\omega \cdot \psi_0\,) \quad = \quad (\bar\partial\omega) \cdot \psi_0 \tag{1.25}$$

für beliebige lokale holomorphe Schnitte $\psi_0 \in \Gamma(S_0\big|_U)$ und (0,r)-Formen $\omega \in \Gamma(\Lambda^{0,r} M\big|_U)$.

1.2. Kählersche Killing–Spinoren. Sei (M^{2m}, g) eine Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit ungerader komplexer Dimension, d.h. $m = 2k + 1$.

Definition 1.1. *Ein Kählerscher Killing–Spinor zur Killing–Zahl $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$ ist ein Spinor $\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1} \in \Gamma(S_k \oplus S_{k+1})$, der den folgenden Differentialgleichungen genügt:*

$$\nabla_Z \psi_k \;=\; 0 \qquad \textit{und} \qquad \nabla_{\bar Z} \psi_k \;=\; -\mu\, \bar Z \cdot \psi_{k+1}, \tag{1.26}$$

$$\nabla_Z \psi_{k+1} \;=\; -\mu\, Z \cdot \psi_k \qquad \textit{und} \qquad \nabla_{\bar Z} \psi_{k+1} \;=\; 0, \tag{1.27}$$

wobei Z ein beliebiger Schnitt in $TM^{1,0}$ ist.

Analog zum Fall Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit Killing–Spinoren führt auch die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren zu starken Einschränkungen der Geometrie der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit (siehe [Kir93], [Lic87]).

Satz 1.2. *Sei M^{2m} eine Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit, auf der ein Kählerscher Killing–Spinor zur Killingzahl μ existiert. Dann ist M eine irreduzible Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit der Skalarkrümmung $R = 4m(m+1)\,\mu^2$.*

Aus dem Satz folgt, daß μ entweder reell oder rein imaginär ist. Entsprechend unterscheidet man *reelle* und *imaginäre* Kählersche Killing–Spinoren.

Haben die Gleichungen (1.26) und (1.27) für ein beliebiges k und ohne die Voraussetzung $m \equiv 1(2)$ eine nicht-triviale Lösung, so folgt, daß die komplexe Dimension von M ungerade ist und daß $k = (m-1)/2$ gilt. Die Bedingung $m \equiv 1(2)$ war also keine Einschränkung.

Sei (M, g) eine geschlossene Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung. Dann ist $\lambda_\pm = \pm\sqrt{R(m+1)/4m}$ eine untere Schranke für das Spektrum des Dirac–Operators und aus dem Beweis dieser Abschätzung folgt, daß Eigenspinoren zum Eigenwert $\lambda_\pm$ automatisch den Differentialgleichungen (1.26) und (1.27) genügen, d.h. Kählersche Killing–Spinoren sind (siehe Anhang B). Umgekehrt zeigt eine leichte Rechnung, daß Kählersche Killing–Spinoren zur Killing–Zahl $\mu_\pm = \frac{1}{m+1}\,\lambda_\pm$ Eigenspinoren zum Eigenwert $\lambda_\pm$ sind.

Bezeichne jetzt $\mathcal{K}_{\pm}(M)$ die Menge der Kählerschen Killing–Spinoren auf M zur Killingzahl $\mu_{\pm}$ und $E_{\lambda_{\pm}}(D)$ den Eigenraum des Dirac–Operators zum Eigenwert $\lambda_{\pm}$, so gilt insgesamt der folgende Satz (siehe [Kir93]):

Satz 1.3. *Sei M eine geschlossene Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit auf der ein Kählerscher Killing–Spinor existiert. Dann ist jeder Kählerscher Killing–Spinor reell und es gilt*

$$\mathcal{K}_{\pm}(M) \quad = \quad E_{\lambda_{\pm}}(D).$$

Ein Kählerscher Killing–Spinor $\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1}$ läßt sich durch lokale komplexe Formen repräsentieren, die folgendermaßen definiert sind:

Sei $\Psi_0 \in \Gamma(S_0|_U)$ ein beliebiger holomorpher Schnitt, der nirgends Null ist auf $U \subset M$. Der Isomorphismus (1.23) liefert eindeutig bestimmte Formen $\xi_k \in \Gamma(\Lambda^{k,0}|_U)$ und $\xi_{k+1} \in \Gamma(\Lambda^{k+1,0}|_U)$ mit $\Psi_k = \bar{\xi}_k \cdot \Psi_0$ und $\Psi_{k+1} = \bar{\xi}_{k+1} \cdot \Psi_0$.

Das dem Spinor Ψ zugeordnete Tripel $\{\Psi_0, \xi_k, \xi_{k+1}\}$ nennt man seine *lokale Darstellung.* Der nächste Satz beschreibt, wie sich die Gleichungen (1.26) und (1.27) in entsprechende Gleichungen für diese lokalen Formen übersetzen.

Satz 1.4. *Der Spinor $\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1}$ ist ein Kählerscher Killing–Spinor genau dann, wenn jede seiner lokalen Darstellungen $(\Psi_0, \xi_k, \xi_{k+1})$ den folgenden Differentialgleichungen genügt:*

$$\begin{array}{lllll}
\text{(i)} & \nabla_Z\, \xi_k & = & 2\,\mu\, Z \lrcorner\, \xi_{k+1}, & \\
\text{(ii)} & \nabla_{\bar{Z}}\, \xi_k & = & -\,\bar{\partial}\, log\, |\Psi_0|^2\, (\bar{Z}) \cdot \xi_k, & \\
\text{(iii)} & \nabla_Z\, \xi_{k+1} & = & 0, & \\
\text{(iv)} & \nabla_{\bar{Z}}\, \xi_{k+1} & = & -\bar{\partial}\, log\, |\Psi_0|^2\, (\bar{Z}) \cdot \xi_{k+1} \quad - \quad \mu\, g(\bar{Z}) \wedge \xi_k & .
\end{array}$$

Dabei ist $Z \in \Gamma(T^{1,0}M\,|_U)$ ein beliebiger Schnitt des holomorphen Tangentialbündels.

Beweis. Sei $\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1}$ ein Kählerscher Killing–Spinor mit lokaler Darstellung $(\Psi_0, \xi_k, \xi_{k+1})$. Da Ψ_0 ein holomorpher Schnitt in $S_0|_U$ ist und in S_0 der kanonische Zusammenhang fixiert war, gilt $\nabla_X\, \Psi_0 \;=\; \partial \log |\Psi_0|^2\, (X)\; \Psi_0$ für ein beliebiges Vektorfeld X. Somit folgt für einen beliebigen Schnitt Z im holomorphen Tangentialbündel $TM^{1,0}$

$$\begin{aligned}
\nabla_Z \Psi_k \quad &= \nabla_Z (\,\bar{\xi}_k \cdot \Psi_0\,) \\
&= \nabla_Z\, \bar{\xi}_k\, \cdot \Psi_0 \quad + \quad \bar{\xi}_k \cdot \partial \log |\Psi_0|^2\, (Z)\; \Psi_0 \\
&= (\, \nabla_Z\, \bar{\xi}_k \quad + \quad \partial \log |\Psi_0|^2\, (Z)\; \bar{\xi}_k\,) \cdot \Psi_0\,.
\end{aligned}$$

Durch eine analoge Rechnung sieht man, daß $\nabla_{\bar{Z}} \Psi_k \;=\; \nabla_{\bar{Z}}\, \bar{\xi}_k \cdot \Psi_0$ gilt. Der Spinor

$\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1}$ war als Kählerscher Killing–Spinor vorausgesetzt, d.h. $\nabla_Z \Psi_k = 0$ und

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar Z} \Psi_k &= -\mu\, \bar Z \cdot \Psi_{k+1} \\ &= -\mu\, \bar Z \cdot \bar\xi_{k+1} \cdot \Psi_0 \\ &= -\,2\,\mu\,(\,\bar Z \lrcorner\, \bar\xi_{k+1}) \cdot \Psi_0\,. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Formel

$$\bar Z \cdot \bar\xi_{k+1} \quad = \quad (-1)^{k+1}\, \bar\xi_{k+1} \cdot \bar Z \quad - \quad 2\, \bar Z \lrcorner\, \bar\xi_{k+1}$$

und die Beziehung $\bar Z \cdot \Psi_0 \;=\; 0$ benutzt. Kombiniert man nun die jeweiligen Gleichungen für $\nabla_{\bar Z} \Psi_k$ bzw. $\nabla_Z \Psi_k$, so erhält man

$$\begin{aligned} \nabla_Z\, \bar\xi_k \quad &= \quad -\,\partial \log |\Psi_0|^2\,(Z)\, \bar\xi_k, \\ \nabla_{\bar Z}\, \bar\xi_k \quad &= \quad -\,2\,\mu\, \bar Z \lrcorner\, \bar\xi_{k+1}\,. \end{aligned}$$

Die Behauptungen (i) und (ii) des Satzes ergeben sich jetzt nach Konjugation beider Seiten der letzten zwei Gleichungen. Um (iii) und (iv) zu beweisen, berechnet man auf analoge Weise

$$\begin{aligned} \nabla_Z \Psi_{k+1} &= \nabla_Z(\,\bar\xi_{k+1} \cdot \Psi_0\,) \\ &= \nabla_Z\, \bar\xi_{k+1} \cdot \Psi_0 \quad + \quad \bar\xi_{k+1} \cdot \partial \log |\Psi_0|^2\,(Z)\, \Psi_0 \\ &= (\,\nabla_Z\, \bar\xi_{k+1} \quad + \quad \partial \log |\Psi_0|^2\,(Z)\, \bar\xi_{k+1}\,) \cdot \Psi_0 \end{aligned}$$

und

$$\nabla_{\bar Z} \Psi_{k+1} \;=\; \nabla_{\bar Z}\, \bar\xi_{k+1} \cdot \Psi_0.$$

Da $\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1}$ ein Kählerscher Killing–Spinor war, folgt $\nabla_{\bar Z} \Psi_{k+1} \;=\; 0$ und

$$\begin{aligned} \nabla_Z \Psi_{k+1} &= -\mu\, Z \cdot \Psi_k \\ &= -\mu\, Z \cdot \bar\xi_k \cdot \Psi_0 \\ &= -\,\mu\,(\,g(Z) \wedge \bar\xi_k) \cdot \Psi_0\,. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Formeln

$$Z \cdot \bar\xi_k \quad = \quad g(Z) \wedge \bar\xi_k \quad - \quad Z \lrcorner\, \bar\xi_k$$

und $Z \lrcorner\, \bar\xi_k \;=\; 0$ benutzt. Aus den Gleichungen für $\nabla_{\bar Z} \Psi_{k+1}$ bzw. $\nabla_Z \Psi_{k+1}$ erhält man jetzt

$$\begin{aligned} \nabla_Z\, \bar\xi_{k+1} \quad &= \quad -\,\partial \log |\Psi_0|^2\,(Z)\, \bar\xi_{k+1} \quad - \quad \mu\, g(Z) \wedge \bar\xi_k \\ \nabla_{\bar Z}\, \bar\xi_k \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

Nach Konjugation dieser beiden Gleichungen folgt schließlich (iii) und (iv). Umgekehrt ist leicht zu sehen, daß ein Spinor $\Psi \in \Gamma(S_k \oplus S_{k+1})$ mit lokaler Darstellung $(\Psi_0, \xi_k, \xi_{k+1})$ der den Gleichungen (i) – (iv) genügt, ein Kählerscher Killing–Spinor ist. $\square$

Aus einer einfachen Rechnung erhält man folgende äquivalente Formulierungen der Gleichungen (ii) und (iv):

$$\begin{array}{llcl} \text{(ii')} & \nabla_{\bar{Z}}\,(\,|\Psi_0|^2\,\xi_k\,) & = & 0, \\ \text{(iv')} & \nabla_{\bar{Z}}\,(\,|\Psi_0|^2\,\xi_{k+1}\,) & = & -\,\mu\, g(\bar{Z}) \wedge (|\Psi_0|^2 \xi_k). \end{array}$$

Folgerung 1.5. *Sei $\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1}$ ein Kählerscher Killing–Spinor zur Killingzahl μ. Dann genügt jede lokale Darstellung $(\Psi_0, \xi_k, \xi_{k+1})$ von Ψ den Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\,|\Psi_0|^2\,\xi_k\,) &= 0\,, \\ \partial\,\xi_k &= \mu(m+1)\xi_{k+1}\,, \\ \partial\,\xi_{k+1} &= 0\,, \\ \bar{\partial}(\,|\Psi_0|^2\,\xi_{k+1}\,) &= i\,\mu\,\Omega \wedge (\,|\Psi_0|^2\,\xi_k). \end{aligned}$$

Beweis. Das Differential $d = \partial + \bar{\partial}$ läßt sich mit Hilfe der kovarianten Ableitung ausdrücken. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \partial &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{f}_i \wedge \nabla_{\mathrm{f}_i}\,, \\ \bar{\partial} &= \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathrm{f}}_i \wedge \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i}\,. \end{aligned}$$

Mit diesen Formeln und Satz 1.4 ergeben sich unmittelbar die Behauptungen. □

Kählersche Spin–Mannigfaltigkeiten mit reellen Kählerschen Killing–Spinoren sind nach Satz 1.2 irreduzible Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung.
In der komplexen Dimension 1 erhält man damit als einzige Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. In der komplexen Dimension 3 hat man das folgende Klassifikationsresultat von K.-D. Kirchberg (siehe [Kir88]).

Theorem 1.6. *Sei M^6 eine geschlossene Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung R, für die $\sqrt{R_0/3}$ $(R_0 = \min R)$ ein Eigenwert des Dirac–Operators ist, d.h. auf der ein Kählerscher Killing–Spinor existiert, dann ist M^6 analytisch isometrisch zum komplex–projektiven Raum $\mathbb{C}P^3$ oder zur Flaggenmannigfaltigkeit $F(1,2)$ bezüglich ihrer natürlichen Kählerstrukturen.*

Der Beweis des Theorems beruht auf der Konstruktion einer komplexen Kontaktstruktur und der Untersuchung der zugehörigen Blätterung. Der Raum der Blätter erweist sich als selbstduale Einstein–Mannigfaltigkeit, deren Twistorraum gerade die Ausgangsmannigfaltigkeit ist. Die Behauptung folgt dann aus einem Theorem von Th. Friedrich und H. Kurke (vgl. [FK82]) bzw. N. Hitchin (vgl. [Hit74]).

Die einzigen bisher bekannten kompakten Beispiele in beliebiger komplexer Dimension waren die komplex–projektiven Räume $\mathbb{C}P^{2k+1}$. Die Existenz von Kählerschen Killing–Spinoren auf diesen Räumen folgt aus der Berechnung des Spektrums des Dirac–Operators auf $\mathbb{C}P^{2k+1}$ (siehe [CFG89], [SS93], Anhang C). Man kann allerdings die Killing–Spinoren auf den komplex–projektiven Räumen auch explizit angeben (vgl. [Kir93]).

Eine Gemeinsamkeit all dieser Beispiele ist die Existenz einer komplexen Kontaktstruktur. Außerdem handelt es sich jeweils um Flaggenmannigfaltigkeiten, was die Suche nach Kählerschen Killing–Spinoren auf Flaggenmannigfaltigkeiten mit komplexer Kontaktstruktur motivierte. Das nächste Kapitel liefert dafür ein Beispiel.

2. Der Dirac–Operator auf einer Flaggenmannigfaltigkeit

In diesem Kapitel soll die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren auf einem speziellen Typ von $SU(n)$–Flaggenmannigfaltigkeiten gezeigt werden. Es handelt sich dabei um kompakte Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung, die eine komplexe Kontaktstruktur besitzen.

Wie sich später zeigt, ist die in diesem Kapitel betrachtete Situation typisch für einfach zusammenhängende homogene komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten, die sich alle als Flaggenmannigfaltigkeiten darstellen lassen (siehe Kapitel 3.2). Die hier im Spezialfall vorgeführte Rechnung ist fast ohne Änderungen auf jede dieser Mannigfaltigkeiten übertragbar und ergibt jeweils das gleiche Ergebnis, d.h. die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren.

Obwohl sich das Resultat dieses Abschnitts auch als Spezialfall von Satz 4.2 ergibt, wurden die Rechnungen mit aufgenommen, da sie die Idee zur Konstruktion eines Kählerschen Killing–Spinors auf einer beliebigen komplexen Kontaktmannigfaltigkeit lieferten.

Die hier benutzten Methoden wurden zum Teil schon in der Arbeit [FG85] verwandt, um den kleinsten Eigenwert des Dirac–Operators auf dem komplex–projektiven Raum $\mathbb{C}P^3$ und der Flaggenmannigfaltigkeit $F(1,2)$ zu bestimmen.

Im weiteren wird die Flaggenmannigfaltigkeit

$$M_n \quad := \quad SU(n+2)/S(U(n)\times U(1)\times U(1))$$

betrachtet. Für $n=1$ erhält man $M_1 = F(1,2)$. Die komplexe Dimension von M_n ist $2n+1$. Außerdem ist M_n Totalraum einer $\mathbb{C}P^1$–Faserung über einem Riemannschen symmetrischen Raum X_n

$$M_n = SU(n+2)/S(U(n)\times U(1)\times U(1)) \xrightarrow{\pi} X_n = SU(n+2)/S(U(n)\times U(2)).$$

Dabei ist X_n eine quaternionisch–Kählersche Mannigfaltigkeit und π gerade die zugehörige Twistor–Faserung (siehe [Sal82]).

Als nächstes soll auf M_n eine geeignete Riemannsche Metrik festgelegt werden, zu der dann der homogene Levi–Civita–Zusammenhang berechnet wird.

Sei $M_n = G/K$ mit $G = SU(n+2)$ und $K = S(U(1)\times U(n)\times U(1))$ und den entsprechenden reellen Lie–Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{k}$. Als gemeinsamen maximalen Torus der Gruppen G und K betrachtet man

$$T := \{\mathrm{diag}(e^{i\beta_1},\ldots,e^{i\beta_{n+2}}) \mid \beta_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n+2}\beta_j = 0\},$$

dessen Lie–Algebra $\mathfrak{t}$ mit $\mathbb{R}^{n+1}$ identifiziert wird (siehe Anhang C). Mit diesen Bezeichnungen kann man die Flaggenmannigfaltigkeit M_n auch als einen Orbit der adjungierten Wirkung von G auf $\mathfrak{g}$ realisieren, der durch den Vektor $H_0 := (1,0,\ldots,0,-1) \in \mathfrak{t}$ verläuft. Die Gruppe K ist der Stabilisator von H_0 und somit auch Zentralisator des Torus $T_0 := \exp\{tH_0 \,:\, t\in\mathbb{R}\}$ (siehe [Bes88], Kapitel 8).

Bezeichne jetzt B die Killing–Form auf $\mathfrak{g}$, dann gilt $B(X,Y) = 2(n+2)\,\mathrm{Tr}(XY)$ (siehe [Hel78]). Das orthogonale Komplement von $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g}$ bezüglich B wird mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet, d.h. man hat $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Fixiert man den Punkt $o = eK \in G/K$, so läßt sich der Tangentialraum an M_n in diesem Punkt mit $\mathfrak{p}$ identifizieren, d.h., $T_o M_n \cong \mathfrak{p}$. Die Isotropiedarstellung $\alpha : K \to SO(T_0 G/K)$ entspricht unter dieser Identifizierung der adjungierten Darstellung von K auf $\mathfrak{p}$.

Man betrachtet nun das Wurzelsystem $\Phi = \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n+2\}$ (siehe Anhang C). Für die komplexifizierte Lie–Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ hat man dann die Wurzelraum–Zerlegung

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \ = \ \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \ \oplus \ \sum_{i,j=1}^{n+2} \mathfrak{g}^{\alpha_{ij}},$$

mit $\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}} = \mathbb{C}X_{\alpha_{ij}}$, wobei $X_{\alpha_{ij}}$ die Matrix ist, die als einzigen von Null verschiedenen Eintrag eine Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte hat. Definiert man $Y_\alpha := X_\alpha - X_{-\alpha}$ und $Z_\alpha := i(X_\alpha + X_{-\alpha})$ für $\alpha \in \Phi$, so erhält man Basisvektoren in der reellen Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ (siehe [Hel78]). Es gilt

$$\mathfrak{g} \ = \ \mathfrak{t} \ \oplus \ \sum_\alpha \mathbb{R}Y_\alpha \ \oplus \ \sum_\alpha \mathbb{R}Z_\alpha.$$

Sei jetzt Ψ das System der komplementären Wurzeln, d.h.

$$\Psi := \{\pm\,\alpha_{1\,i}, \quad \pm\,\alpha_{i\,n+2}, \quad \pm\,\alpha_{1\,n+2} \ : \ i = 2,\ldots,n+1\}. \tag{2.1}$$

Die Wurzelvektoren X_α mit $\alpha \in \Psi$ bilden eine Basis in $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cong T_o M_n^{\mathbb{C}}$. Die Menge Ψ enthält genau die Wurzeln aus Φ, die eingeschränkt auf die Lie–Algebra des Torus T_0 nicht verschwinden.

Integrable invariante komplexe Strukturen sind durch Teilsysteme $\Psi^+ \subset \Psi$ gegeben, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) $\Psi = \Psi^+ \cup (-\Psi^+)$,

(2) $\Psi^+ \cap (-\Psi^+) = \emptyset$,

(3) $(\Psi^+ + \Psi^+) \cap \Phi \subset \Psi^+$.

Die entsprechende komplexe Struktur wirkt dann durch Multiplikation mit $+i$ auf den Vektoren X_α für $\alpha \in \Psi^+$, d.h. $T_o^{1,0} M_n = \oplus_{\alpha \in \Psi^+} \mathfrak{g}^\alpha$. Die dritte Bedingung wird als Abgeschlossenheit bezeichnet. Das heißt, ist die Summe zweier Wurzeln aus Ψ^+ wieder eine Wurzel, so muß sie in Ψ^+ liegen. In der vorliegenden Situation gibt es verschiedene invariante komplexe Strukturen, die integrabel und nicht äquivalent sind (siehe [AP86], [BH58]). In Übereinstimmung mit den allgemeinen Überlegungen in Kapitel 3.2, ist es günstig, die durch das folgende Teilsystem gegebene Struktur zu fixieren:

$$\Psi^+ := \{\alpha_{i\,1}, \quad \alpha_{n+2\,i}, \quad \alpha_{n+2\,1} \ : \ i = 2,\ldots n+1\}.$$

Im weiteren sei $\alpha_i := \alpha_{n+2\,i+1}$, $\beta_i := \alpha_{i+1\,1}$ für $i = 1, \ldots n$ und $\gamma := -\,\alpha_{n+2\,1} = \alpha_{1\,n+2}$. Unter der Isotropiedarstellung zerfällt $\mathfrak{p}$ in zwei irreduzible Summanden,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

mit $\mathfrak{p}_1 = \mathrm{span}\{Y_{\alpha_i},\, Z_{\alpha_i},\, Y_{\beta_i},\, Z_{\beta_i}\}$, $i = 1, \ldots n$, und $\mathfrak{p}_2 = \mathrm{span}\{Y_\gamma,\, Z_\gamma\}$. Diese Zerlegung entspricht gerade der Aufspaltung des Tangentialraums $T_o M_n$ in einen horizontalen und einen vertikalen Teil bezüglich der Faserung π.

Lemma 2.1. *Die Zerlegung $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$ ist orthogonal bezüglich der Killing–Form und* $\mathrm{Ad}(K)$*–invariant. Außerdem gilt*

$$\begin{array}{rcl} [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] & \subset & \mathfrak{p}_1 \\ [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1] & \subset & \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_2 \\ [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2] & \subset & \mathfrak{k}. \end{array}$$

Beweis. Zum Beweis genügt es, die Kommutatoren der Wurzelvektoren $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ für $\alpha \in \Psi$ zu berechnen. Unter Berücksichtigung von $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ (falls $\alpha + \beta \in \Phi$) und $\alpha_i + \beta_i = -\,\gamma$ erhält man durch einfache Matrizenmultiplikation

$$[X_{\alpha_i}, X_{\beta_i}] = X_{-\gamma} \quad [X_{\alpha_i}, X_\gamma] = -X_{-\beta_i} \quad [X_{\beta_i}, X_\gamma] = X_{-\alpha_i}. \tag{2.2}$$

Außerdem gilt für beliebige Wurzelvektoren $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Geht man zu den reellen Vektoren über, so ergeben sich die gesuchten Inklusionen. Die $\mathrm{Ad}(K)$–Invarianz beweist man durch ähnliche Überlegungen. □

Sei $B_0 := -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(XY) = -\frac{1}{4(n+2)}\,B(X,Y)$, dann definiert die Gleichung

$$g := B_0\big|_{\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1} \; + \; 2\,B_0\big|_{\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_2}$$

ein $\mathrm{Ad}(K)$–invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{p}$ und induziert folglich eine linksinvariante Metrik auf G/K, die auch mit g bezeichnet sei. Das nächste Lemma beschreibt den homogenen Levi–Civita–Zusammenhang bezüglich der Metrik g. Es zeigt insbesondere, daß die Kommutatorrelationen (2.2) die Grundlage für alle weiteren Rechnungen darstellen.

Lemma 2.2. *Der Levi–Civita–Zusammenhang der Metrik g ist durch eine Abbildung* $\Lambda : \mathfrak{p} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{p})$ *gegeben, die folgendermaßen definiert ist:*

$$\begin{array}{rcl} \Lambda(X)Y & = & \frac{1}{2}\,[X,Y]_{\mathfrak{p}_2}, \\ \Lambda(X)B & = & [X,B]_{\mathfrak{p}_2}, \\ \Lambda(A)Y & = & 0, \\ \Lambda(B)A & = & 0, \end{array}$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{p}_1$ und $A, B \in \mathfrak{p}_2$. Der Index bezeichnet dabei die Projektion auf die entsprechende Komponente.

Beweis. Der Beweis ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Theorem von Wang (siehe [FG85]). □

Lemma 2.3. *Die Mannigfaltigkeit (M_n, g) ist eine Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit der Skalarkrümmung*

$$R = 4(n+1)(2n+1).$$

Beweis. Für den Beweis nutzt man das Lemma 2.2 und die Formeln aus [Bes88], Kapitel 7, die den Ricci–Tensor bezüglich des homogenen Levi-Civita–Zusammenhangs beschreiben. □

Bemerkung. *Daß es sich bei der betrachteten Metrik um eine Kähler–Einstein–Metrik handelt, folgt auch aus der allgemeinen Beschreibung solcher Metriken auf beliebigen Flaggenmannigfaltigkeiten (vgl.* [Tak78], [AP86]*).*

Bezüglich B_0 haben die Vektoren Y_α und Z_α die Länge eins, d.h., man erhält die folgende orthonormale Basis in $(\mathfrak{p}, g)$:

$$\begin{aligned} e_{2j-1} &= Y_{\alpha_j}, \\ e_{2j} &= Z_{\alpha_j}, \\ e_{2n+2j-1} &= Y_{\beta_j}, \\ e_{2n+2j} &= Z_{\beta_j}, \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, n$ und

$$\begin{aligned} e_{4n+1} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} Y_{-\gamma}, \\ e_{4n+2} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} Z_{-\gamma}. \end{aligned}$$

Sei $\lambda : Spin(m) \to SO(m)$ die zweifache nicht–triviale Überlagerung von $SO(m)$. Dann liefert das Differential λ_* einen Isomorphismus der entsprechenden Lie–Algebren, bei dem $e_i \cdot e_j$ in die Matrix $2\,E_{ij}$ übergeht ($E_{ij} := X_{\alpha_{ij}} - X_{\alpha_{ji}}$). Man definiert

$$\widetilde{\Lambda} := (\lambda_*)^{-1} \circ \Lambda : \quad \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{spin}(\mathfrak{p}).$$

Berechnet man jetzt die Kommutatoren aus Lemma 2.2 für die Vektoren der orthonormalen Basis $\{e_j\}, j = 1, \ldots, 4n+2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}(e_{2j-1}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\,(e_{2n+2j-1} \cdot e_{4n+1} &+&\quad e_{2n+2j} \cdot e_{4n+2}) \cdot \\ \widetilde{\Lambda}(e_{2j}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\,(e_{4n+1} \cdot e_{2n+2j} &+&\quad e_{2n+2j-1} \cdot e_{4n+2}) \cdot \\ \widetilde{\Lambda}(e_{2n+2j-1}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\,(e_{4n+1} \cdot e_{2j-1} &+&\quad e_{4n+2} \cdot e_{2j}) \cdot \\ \widetilde{\Lambda}(e_{2n+2j}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\,(e_{4n+2} \cdot e_{2j-1} &+&\quad e_{2j} \cdot e_{4n+1}) \cdot . \end{aligned}$$

Bezüglich der orthonormalen Basis $\{e_j\}$ hat die fixierte komplexe Struktur J die Gestalt $Je_{2j-1} = e_{2j}$. Damit ist durch $\mathrm{f}_j := \frac{1}{2}(e_{2j-1} - ie_{2j})$, $j = 1, \ldots, 2n+1$, eine Basis in

$\mathfrak{p}^{1,0} := T_0^{1,0} M_n$ definiert. Eine etwas einfachere Form erhält die Abbildung $\widetilde{\Lambda}$, wenn man sie komplex–linear auf $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ fortsetzt. Es gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}(\mathrm{f}_j) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \bar{\mathrm{f}}_{n+j} \cdot \mathrm{f}_{2n+1} \cdot \\ \widetilde{\Lambda}(\mathrm{f}_{n+j}) &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \bar{\mathrm{f}}_{j} \cdot \mathrm{f}_{2n+1} \cdot \\ \widetilde{\Lambda}(\mathrm{f}_{2n+1}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die homogenen Spinstrukturen auf M_n stehen in bijektiver Beziehung zu den Lifts $\widetilde{\alpha}$ der Isotropiedarstellung, d.h. zu Homomorphismen $\widetilde{\alpha} : K \to Spin(2n)$ mit $\alpha = \lambda \circ \widetilde{\alpha}$. Für die Existenz eines solchen Lifts hat man das folgende Kriterium: (siehe [HS89],[Ada69]):

$$2\,\frac{(\rho_\Psi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \qquad \text{für alle} \quad \alpha \in \Psi.$$

Dabei ist $\rho_\Psi := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Psi^+} \alpha$ und $(\cdot,\cdot)$ bezeichnet das von B_0 induzierte Skalarprodukt. Es gilt $\rho_\Psi = -\frac{1}{2}(n+1)\,\gamma$ und damit folgt

$$2\,\tfrac{(\rho_\Psi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = 2\,\tfrac{(\rho_\Psi,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)} = -\tfrac{1}{2}(n+1) \qquad \text{und} \qquad 2\,\tfrac{(\rho_\Psi,\gamma)}{(\gamma,\gamma)} = -(n+1),$$

d.h. für $n \equiv 1(2)$ existiert auf M_n eine Spinstruktur. Für das Weitere sei jetzt n als ungerade vorausgesetzt ($n = 2k+1$) und die entsprechende Spinstruktur fixiert. Diese ist eindeutig bestimmt, da M_n einfach zusammenhängend ist.

Das Spinorbündel S von M_n ist darstellbar als assoziiertes Bündel $S = G \times_{\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}} \Delta$, wobei Δ den Spinormodul und $\widetilde{\rho}$ die Spinordarstellung bezeichnet (siehe Anhang C). Die Schnitte in S werden mit K–invarianten Funktionen auf G identifiziert, d.h.

$$\Gamma(S) \cong \{\phi \in C^\infty(G;\Delta) \;:\; \phi(g\,k) = (\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha})(k)^{-1}\phi(g) \text{ für alle } g \in G, k \in K\}.$$

Die Wirkung des Dirac–Operators D auf solchen K–invarianten Funktion ist durch die folgende Formel gegeben:

$$D\phi = \sum_{j=1}^{4n+2} \widetilde{\rho}(e_j)[e_j(\phi) + \widetilde{\rho}\circ\widetilde{\Lambda}(e_j)\phi], \tag{2.4}$$

wobei $\{e_j\}_{j=1,\dots,4n+2}$ eine orthonormale Basis in $\mathfrak{p}$ ist und $e_j(\phi)$ die Ableitung von ϕ nach dem Vektorfeld e_j bezeichnet (siehe [Ike75]). Aus dieser Formel sieht man, daß der Dirac–Operator auf konstanten Funktionen eine besonders einfache Form hat. Eine Funktion $\phi \in C^\infty(G;\Delta)$ mit $\phi \equiv v$ und $v \in \Delta$ definiert genau dann einen Spinor, wenn v im Kern der Darstellung $\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}$ liegt, d.h. wenn $\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}(k)v = v$ für alle $k \in K$ gilt. Es soll nun der Kern dieser Darstellung bestimmt werden.

Lemma 2.4. *Die Darstellung $(\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}, \Delta)$ der Gruppe K hat die Gewichte*

$$\pm\alpha_1 \pm \cdots \pm \alpha_n \pm \beta_1 \pm \cdots \pm \beta_n \pm \gamma.$$

Hierbei werden alle 2^{2n+1} möglichen Vorzeichenkombinationen durchlaufen.

Beweis. Aus der Definition der Wurzelvektoren X_α folgt $\mathrm{ad}(H)X_\alpha = \alpha(H)X_\alpha$ für alle $H \in \mathfrak{t}$ und somit gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(H)Y_\alpha &= \alpha(H)Z_\alpha \\ \mathrm{ad}(H)Z_\alpha &= -\,\alpha(H)Y_\alpha . \end{aligned}$$

Hieraus erhält man die Realisierung von $\mathrm{ad}(H)$ als Element in $\mathfrak{so}(\mathfrak{p})$. Wendet man darauf den Isomorphismus $(\lambda_*)^{-1}$ an, so folgt

$$\widetilde{\alpha}(H) \;=\; \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i(H)\,e_{2i-1}\cdot e_{2i} \;+\; \beta_i(H)\,e_{2n+2i-1}\cdot e_{2n+2i}\,)\cdot \;-\; \gamma(H)\,e_{4n+1}\cdot e_{4n+2}\cdot .$$

Sei jetzt $u(\varepsilon) = u(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1})$ die im Anhang A definierte Basis des Spinormoduls Δ, die durch $(2n+1)$–Tupel $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1})$ mit $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ parametrisiert ist. Dann gilt $\widetilde{\rho}(e_{2j-1}\cdot e_{2j})\,u(\varepsilon) = e_{2j-1}\cdot e_{2j}\cdot u(\varepsilon) = -i\,\varepsilon_j\,u(\varepsilon)$ und folglich

$$\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}(H)u(\varepsilon) \;=\; -\tfrac{i}{2}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i(H)\,\varepsilon_i \;+\; \beta_i(H)\,\varepsilon_{n+i}\,)\,u(\varepsilon) \;+\; \tfrac{i}{2}\gamma(H)\,\varepsilon_{2n+1}\,u(\varepsilon). \qquad (2.5)$$

Damit sind die Vektoren $u(\varepsilon)$ Gewichtsvektoren der K–Darstellung $(\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha},\Delta)$ zu den angegebenen Gewichten. $\square$

Bezeichne $\Delta^0 \subset \Delta$ den Unterraum, auf dem K trivial wirkt. Das Lemma 2.4 gestattet es dann, eine explizite Basis in Δ^0 anzugeben. An dieser Stelle ist auch die Voraussetzung $n = 2k+1$ notwendig.

Satz 2.5. *Sei $n = 2k+1$ und $\Delta^0 = \Delta^0_+ \oplus \Delta^0_-$ der Unterraum, auf dem K trivial wirkt. Dann gilt*

- *Der Unterraum $\Delta^0_+ \subset \Delta_+$ wird von den Vektoren*
$$u^+_\varepsilon := u(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1)$$
aufgespannt, wobei genau k der ε_j's gleich +1 sind.

- *Der Unterraum $\Delta^0_- \subset \Delta_-$ wird von den Vektoren*
$$u^-_\varepsilon := u(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,-1)$$
aufgespannt, wobei genau k der ε_j's gleich -1 sind.

Beweis. Der Unterraum Δ^0 wird von den Gewichtsvektoren zum Gewicht 0 aufgespannt. Die angegebenen Vektoren $\{u^\pm_\varepsilon\}$ sind genau diese Gewichtsvektoren, denn aus (2.5) und der Formel $\alpha_i + \beta_i = -\,\gamma$ folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}(H)\,u^+_\varepsilon &= \tfrac{i}{2}\,(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\gamma(H))\,u^+_\varepsilon \;+\; \tfrac{1}{2}\,i\,\gamma(H)\,u^+_\varepsilon \\ &= \tfrac{i}{2}\,(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j \;+\; 1)\,\gamma(H)\,u^+_\varepsilon . \end{aligned}$$

Nach der Definition von u_ε^+ kommt unter den ε_j genau k–mal die 1 und damit (k+1)–mal die -1 vor, d.h. $\sum_j \varepsilon_j = -1$ und somit $\widetilde{\rho} \circ \widetilde{\alpha}(H)\, u_\varepsilon^+ = 0$. Andererseits überzeugt man sich leicht davon, daß die Vektoren $u_\varepsilon^\pm$ die einzigen Gewichtsvektoren zum Gewicht 0 sind. Somit bilden sie eine Basis im Raum Δ^0. Die Aussage für Δ^0_- folgt analog.

Schließlich ergibt sich aus der Charakterisierung der Räume $\Delta_\pm$ bezüglich der Basis $u(\varepsilon)$ (siehe Anhang A), daß $u_\varepsilon^\pm \in \Delta_\pm$ gilt. □

Bemerkung. *Ist n ungerade, so hat der Teilraum Δ^0 die Dimension $2\binom{n}{k}$. Für gerades n gibt es keine K–invarianten Vektoren in Δ.*

Sei $v \in \Delta^0$ und $\phi \equiv v$ der mittels v definierte Spinor. Dann gilt $\nabla_X \phi = \widetilde{\rho} \circ \widetilde{\Lambda}(X)\phi$ für alle $X \in \mathfrak{p}$. Sucht man Kählersche Killing–Spinoren ϕ in der Form $\phi \equiv v_+ + v_-$ mit $v_+ \in \Delta^0_+$ und $v_- \in \Delta^0_-$, so reduziert sich die entsprechende Differentialgleichung auf eine rein algebraische Gleichung, und man erhält eine Lösung als geeignete Linearkombination von Vektoren in Δ^0.

In der Tat erhält man einen Killing–Spinor, wenn man $v_\pm$ als die Summe aller Basisvektoren $u_\varepsilon^\pm$ in $\Delta^0_\pm$ definiert.

Da die für den Beweis nötigen Rechnungen recht unübersichtlich sind, sollen sie hier nicht vorgeführt werden. Wesentlich klarer wird der Ansatz und auch der Beweis, wenn man die Realisierung des Spinormoduls als Raum der $(0,*)$–Formen benutzt (siehe Anhang A).
Der Spinormodul Δ sei jetzt mit $\Lambda^{0,*}(\mathfrak{p}^*)$ identifiziert, d.h. $\Delta = \oplus_{r=0}^{2n+1}\Delta_r$ und
$\Delta_r = \mathrm{span}\{\bar{\mathrm{f}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\mathrm{f}}^{i_r}\}$ mit, $\bar{\mathrm{f}}^{j} = e^{2j-1} - ie^{2j}$ und $\{e^j\}$ eine orthonormale Basis in $\mathfrak{p}^*$.

Ersetzt man in Satz 2.5 die Vektoren $\{u_\varepsilon^\pm\}$ durch die entsprechenden Gewichtsvektoren $\bar{\mathrm{f}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\mathrm{f}}^{i_r}$ (siehe Lemma A.1), so erhält man

$$\Delta^0_+ \quad = \quad \mathrm{span}\{(\bar{\mathrm{f}}^{i_1} \wedge \bar{\mathrm{f}}^{n+i_1}) \wedge \cdots \wedge (\bar{\mathrm{f}}^{i_{k+1}} \wedge \bar{\mathrm{f}}^{n+i_{k+1}})\}, \tag{2.6}$$

$$\Delta^0_- \quad = \quad \mathrm{span}\{(\bar{\mathrm{f}}^{i_1} \wedge \bar{\mathrm{f}}^{n+i_1}) \wedge \cdots \wedge (\bar{\mathrm{f}}^{i_k} \wedge \bar{\mathrm{f}}^{n+i_k}) \wedge \bar{\mathrm{f}}^{2n+1}\}. \tag{2.7}$$

Sei $\Theta := \sum_{j=1}^n (\bar{\mathrm{f}}^{j} \wedge \bar{\mathrm{f}}^{n+j})$ und $\phi = \phi_n + \phi_{n+1}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \phi_n &:= \tfrac{1}{k!}\,\Theta^k \wedge \bar{\mathrm{f}}^{2n+1} \in \quad \Lambda^{0,2k+1} = \Lambda^{0,n} \\ \phi_{n+1} &:= \tfrac{1}{(k+1)!}\, i\,\Theta^{k+1} \in \quad \Lambda^{0,2k+2} = \Lambda^{0,n+1} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Man zeigt leicht, daß ϕ_n und ϕ_{n+1} in Δ^0 liegen und daß sie mit den oben definierten Vektoren v_+ und v_- übereinstimmen.

Satz 2.6. *Die konstante Abbildung $\phi = \phi_n + \phi_{n+1} : G \to \Delta$ definiert einen Kählerschen Killing–Spinor auf der Mannigfaltigkeit M_n $(n = 2k+1)$.*

Beweis. Geht man in der Formel (2.4) zur Basis $\{\mathrm{f}_i\}_{i=1,\ldots,2n+1}$ über, so folgt zunächst

$$D\psi \quad = \quad 2\sum_{i=1}^{2n} \Big(\bar{\mathrm{f}}_i \cdot \widetilde{\Lambda}(\mathrm{f}_i) \; + \; \mathrm{f}_i \cdot \widetilde{\Lambda}(\bar{\mathrm{f}}_i)\Big) \cdot \psi, \tag{2.9}$$

wobei ψ ein durch eine konstante Abbildung definierter Spinor ist. Betrachtet man jetzt $\psi = \phi_n = \frac{1}{k!}\,\Theta^k \wedge \bar{\mathrm{f}}^{\,2n+1}$ und nutzt die spezielle Form der Clifford–Multiplikation (A.7) sowie Formel (2.3) für die Abbildung $\widetilde{\Lambda}$, so erhält man $\mathrm{f}_{2n+1} \cdot \phi_n = i\,\bar{\mathrm{f}}^{\,2n+1} \wedge \phi_n = 0$ und damit

$$\begin{aligned} D\,\phi_n &= \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{f}_i \cdot \mathrm{f}_{n+i} \cdot \bar{\mathrm{f}}_{2n+1} + \mathrm{f}_{n+i} \cdot \bar{\mathrm{f}}_{2n+1} \cdot \mathrm{f}_i) \cdot \phi_n \\ &= -2\sqrt{2}\,i\,(\sum_{i=1}^{n} \bar{\mathrm{f}}^{\,i} \wedge \bar{\mathrm{f}}^{\,n+i}) \wedge (\bar{\mathrm{f}}_{\,2n+1} \lrcorner\, \phi_n) \\ &= -\tfrac{2\sqrt{2}}{k!}\,i\,\Theta^{k+1} \\ &= -2\sqrt{2}(k+1)\,\phi_{n+1} \\ &= -\sqrt{2}(n+1)\,\phi_{n+1}. \end{aligned}$$

Analog findet man $D\phi_{n+1} = -\sqrt{2}(n+1)\phi_n$, d.h. $\phi = \phi_n + \phi_{n+1}$ ist ein Eigenspinor des Dirac–Operators zum Eigenwert $-\sqrt{2}(n+1)$. Dies ist aber genau der kleinstmögliche, da (M_n, g) die Skalarkrümmung $R = 4(n+1)(2n+1)$ hat. Die Behauptung des Satzes ergibt sich somit aus Satz 1.3. $\square$

Bemerkung. *Die 1–Form* $\mathrm{f}^{\,2n+1}$ *entspricht, bei geeigneter Identifikation, der komplexen Kontaktform der Mannigfaltigkeit* M_n *und* $\partial\,\mathrm{f}^{\,2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar{\Theta}$.

3. Komplexe Kontaktstrukturen

3.1. Definition und Eigenschaften. In diesem Abschnitt wird der Begriff einer komplexen Kontaktmannigfaltigkeit eingeführt, und es werden einige einfache Eigenschaften angegeben. Dieser Teil stützt sich wesentlich auf die Arbeit [Kob59], in der zum erstenmal komplexe Kontaktstrukturen betrachtet wurden.

Sei M^{2m} eine komplexe Mannigfaltigkeit ungerader komplexer Dimension, $m = 2n + 1$.

Definition 3.1. *Eine komplexe Kontaktstruktur auf M ist eine Familie $\mathcal{C} = \{U_i, \omega_i\}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\{U_i\}$ ist eine offene Überdeckung von M.*

(ii) *ω_i ist eine holomorphe 1–Form auf U_i.*

(iii) *$\omega_i \wedge (\partial\omega_i)^n \in \Gamma(\Lambda^{m,0}M\big|_{U_i})$ ist nirgends Null auf U_i.*

(iv) *Ist $U_i \cap U_j \neq 0$, so existiert eine holomorphe Funktion f_{ij} auf $U_i \cap U_j$ mit $\omega_i = f_{ij}\,\omega_j$.*

(v) *Die Familie $\mathcal{C}$ ist maximal bezüglich dieser Eigenschaften.*

Die Formen $\{\omega_i\}$ bezeichnet man als (lokale) *Kontaktformen.* Eine komplexe Kontaktmannigfaltigkeit ist eine komplexe Mannigfaltigkeit zusammen mit einer komplexen Kontaktstruktur.
Aus (iv) folgt, daß die lokalen Kontaktformen ein Unterbündel $L_{\mathcal{C}} \subset \Lambda^{1,0}M$ definieren. Das komplexen Linienbündel $L_{\mathcal{C}}$ hat die Übergangsfunktionen $\{f_{ij}^{-1}\}$ und lokale Schnitte $\{\omega_i\}$.

Satz 3.2. *Sei $(M, \mathcal{C})$ eine komplexe Kontaktmannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2n + 1$ und sei $K = \Lambda^{m,0}M$ das kanonische Bündel. Dann gilt*

$$L_{\mathcal{C}}^{n+1} \quad \cong \quad K. \tag{3.1}$$

Insbesondere ist die erste Chern–Klasse $c_1(M)$ durch $n + 1$ teilbar, und M besitzt damit für ungerades n eine Spinstruktur.

Beweis. Sei $\mathcal{C} = \{U_i, \omega_i\}$ die komplexe Kontaktstruktur. Dann folgt aus $\omega_i = f_{ij}\,\omega_j$

$$\begin{aligned} \omega_i \wedge (\partial\omega_i)^n &= (f_{ij}\,\omega_j) \wedge (\partial f_{ij} \wedge \omega_j \;+\; f_{ij}\partial\omega_j)^n \\ &= (f_{ij})^{n+1}\,\omega_j \wedge (\partial\omega_j)^n. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist erfüllt, da $\omega \wedge \omega = 0$ für 1–Formen ω gilt. Die Form $\omega_i \wedge (\partial\omega_i)^n$ ist eine lokale holomorphe Form vom Grad $m = 2n + 1$, die auf U_i keine Nullstellen hat. Somit definiert sie einen lokalen Schnitt im kanonischen Bündel K. Die Funktionen $\{f_{ij}^{-(n+1)}\}$ sind dann die Übergangsfunktionen von K, und es folgt die behauptete Isomorphie. Insbesondere gilt

$$c_1(M) \;=\; -c_1(K) \;=\; -(n+1)\,c_1(L_{\mathcal{C}}).$$

Die Existenz einer Spin–Struktur auf M ist äquivalent zu $c_1(M) \equiv 0(2)$, womit dann auch die zweite Behauptung des Satzes bewiesen ist. □

Für die Definition einer komplexen Kontaktstruktur läßt sich auch eine globale Formulierung angeben, die besonders für die Konstruktion von Beispielen geeignet ist (vgl. [Kob59]).

Satz 3.3. *Sei M^{2m} eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $m = 2n+1$. M besitzt genau dann eine komplexe Kontaktstruktur, wenn auf M ein komplexes Linienbündel L existiert, so daß es auf dem assoziierten $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündel P eine (global definierte) holomorphe 1–Form ω mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

(i) *$(\partial\omega)^{n+1}$ ist nirgends Null auf P.*
(ii) *Die Einschränkung von ω auf Vektoren tangential zu den Fasern ist Null.*
(iii) *$R_z^*\omega = z\omega$, für alle $z \in \mathbb{C}^*$,*
wobei R_z die Rechtswirkung von z auf P bezeichnet.

Beweis. Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit komplexer Kontaktstruktur $\mathcal{C} = \{U_i, \omega_i\}$ und dem Linienbündel $\pi : L_{\mathcal{C}} \to M$. Sei $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}$ eine lokale Trivialisierung des Linienbündels $L_{\mathcal{C}}$. Für $v \in (L_{\mathcal{C}})_x$ und $x \in U_i \cap U_j$ gilt dann

$$\phi_i(v) = (x, z_i), \quad \phi_j(v) = (x, z_j), \quad z_i = f_{ji}\, z_j,$$

und folglich

$$z_i \cdot \pi^*(\omega_i) = z_j \cdot \pi^*(\omega_j).$$

Das bedeutet, daß $\{z_i \cdot \pi^*(\omega_i)\}$ eine holomorphe 1–Form ω auf $L_{\mathcal{C}}$ definiert. Auf dem assoziierten $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündel $P_{\mathcal{C}}$, d.h. auf dem Komplement des Nullschnitts in $L_{\mathcal{C}}$, betrachtet man die Einschränkung von ω, die wieder mit ω bezeichnet sei. Diese holomorphe 1-Form hat offensichtlich die Eigenschaften (ii) und (iii). Rechnet man auf $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$, so gilt

$$(\partial\omega)^{n+1} = (\tfrac{\partial}{\partial z} \wedge \pi^*(\omega_i) + z_i\, \pi^*(\partial\omega_i))^{n+1} = z_i^n \tfrac{\partial}{\partial z} \wedge \pi^*(\omega_i \wedge (\partial\omega_i)^n),$$

d.h. auch (i) ist erfüllt. Definiert man auf U_i durch $s_i(x) = \phi_i^{-1}(x,1)$ einen Schnitt in $L_{\mathcal{C}}$, dann folgt insbesondere

$$\omega_i = s_i^*\omega.$$

Umgekehrt sei $\pi : L \to M$ ein komplexes Linienbündel, und es existiere auf dem assoziierten $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündel P eine holomorphe 1–Form ω mit den Eigenschaften (i) – (iii). Ist $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}$ eine lokale Trivialisierung für L, und definiert man wieder lokale Schnitte s_i durch $s_i = \phi_i^{-1}(x,1)$, so liefert $\{U_i,\ s_i^*\omega\}$ eine komplexe Kontaktstruktur auf M. □

Folgerung 3.4. *Sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Dann besitzt eine komplexe Kontaktstruktur auf M eine global definierte Kontaktform genau dann, wenn die erste Chern–Klasse $c_1(M)$ gleich Null ist.*

Beweis. Aus Satz 3.3 folgt, daß die Existenz einer global definierten Kontaktform äquivalent ist zur Existenz eines globalen Schnittes im $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündel $P_{\mathcal{C}}$, das somit ein triviales Bündel sein muß. Andererseits hat man aber den Isomorphismus (3.1) aus dem folgt, daß $P_{\mathcal{C}}$ genau dann ein triviales Bündel ist, wenn auch das kanonische Bündel trivial ist, d.h. genau dann, wenn $c_1(M) = 0$ gilt. □

Bemerkung. *Betrachtet man auf $L_{\mathcal{C}}$ die reelle Form $\eta := \omega + \bar{\omega}$, so liefert die Einschränkung von η auf das assoziierte S^1–Hauptfaserbündel $Q_{\mathcal{C}}$, d.h. das Sphärenbündel in $L_{\mathcal{C}}$, eine reelle Kontaktstruktur auf $Q_{\mathcal{C}}$. Um das einzusehen, hat man nachzuweisen, daß $\eta \wedge (d\eta)^{2n+1}$ in keinem Punkt von $Q_{\mathcal{C}}$ verschwindet. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der globalen 1–Form ω (siehe* [Kob59]*).*

Die Strukturgruppe einer orientierbaren reellen Kontaktmannigfaltigkeit der Dimension $2n+1$ läßt sich auf $SO(1) \times U(n) = SO(1) \times (SU(n) \otimes U(1))$ reduzieren (siehe [Bla76]). In Analogie zu dieser Aussage hat man für komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten den folgenden Satz (vgl. [Kob59]).

Satz 3.5. *Sei M eine komplexe Kontaktmannigfaltigkeit der komplexen Dimension $2n+1$. Dann läßt sich die Strukturgruppe von M reduzieren auf*

$$U(1) \times (Sp(n) \otimes U(1)).$$

Beweis. Sei $\mathcal{C} = \{U_i, \omega_i\}$ eine komplexe Kontaktstruktur auf M, dann definieren die Formen ω_i ein holomorphes Unterbündel F des (holomorphen) Tangentialbündels $T^{1,0}M$, das folgendermaßen definiert ist:

$$F_x = \{Z \in T_x^{1,0}M \ : \ \omega_i(Z) = 0\} \qquad \text{für} \quad x \in U_i.$$

Der Quotient $T^{1,0}M/F$ ist ein holomorphes Linienbündel mit den Übergangsfunktionen $\{f_{ij}\}$ und somit isomorph zu $L_{\mathcal{C}}^*$. Man hat also die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow T^{1,0}M \longrightarrow L_{\mathcal{C}}^* \longrightarrow 0$$

von holomorphen Vektorbündeln über M, d.h., es gilt $T^{1,0}M \cong F \oplus L_{\mathcal{C}}^*$. Aus der Definition der Kontaktform folgt, daß $d\omega_i$ eine symplektische Form auf F_x definiert, die bis auf einen Faktor bestimmt ist, d.h. $d\omega_i$ ist von maximalem Rang und es gilt

$$d\omega_j\big|_{F_x} \quad = \quad f_{ji}\, d\omega_i\big|_{F_x},$$

woraus sich dann die Reduktion der Strukturgruppe ergibt. □

An dieser Stelle lassen sich zwei einfache Beispiele für komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten angeben, die man unter Benutzung der globalen Formulierung aus Satz 3.3 erhält (siehe [Kob59], [KO73]).

Beispiel. Der komplex–projektive Raum $\mathbb{C}P^{2n+1}$.
Sei $z^0, z^1, \dots, z^{2n}, z^{2n+1}$ das natürliche Koordinatensystem in $\mathbb{C}^{2n+2}$. Auf $\mathbb{C}^{2n+2} - \{0\}$ (betrachtet als $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündel über $\mathbb{C}P^{2n+1}$) definiert man die holomorphe 1–Form

$$\omega \quad := \quad (z^0 dz^1 - z^1 dz^0) + \cdots + (z^{2n} dz^{2n+1} - z^{2n+1} dz^{2n}).$$

Die Form ω erfüllt die Bedingungen (i)–(iii) von Satz 3.3, und liefert damit eine komplexe Kontaktstruktur. Sei also $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{C}P^{2n+1}$ mit einem System lokaler holomorpher Schnitte s_i des Bündels $\mathbb{C}^{2n+2} - \{0\}$ über U_i. Setzt man dann $\omega_i = s_i^*\omega$, so ist $\{U_i, \omega_i\}$ die gesuchte komplexe Kontaktstruktur auf $\mathbb{C}P^{2n+1}$. Die assoziierte reelle Kontaktstruktur ist gerade die gewöhnliche Kontaktstruktur auf dem reell–projektiven Raum $\mathbb{R}P^{4n+3}$.

Beispiel. Das projektivierte Kotangentialbündel $\mathbb{P}(T^*X)$.
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1$ und T^*X das holomorphe Kotangentialbündel. Man definiert M als die Projektivierung von T^*X, d.h. $M := \mathbb{P}(T^*X)$, und betrachtet T^*X als $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündel über M ($\dim_{\mathbb{C}} M = 2n+1$). Auf dem Totalraum von T^*X hat man eine natürliche holomorphe 1–Form

$$\omega(Z) := v(p_* Z) \quad \textit{für} \quad Z \in T_v(T^*X), v \in T^*X.$$

Dabei bezeichnet $p : T^*X \to X$ die Projektion. Führt man jetzt lokale Koordinaten $z^0, z^1, \dots, z^n$ in X ein, mit dem induzierten Koordinatensystem $z^0, z^1, \dots, z^n, \zeta_0, \dots, \zeta_n$ für T^*X, so ist ω gegeben durch

$$\omega \quad = \quad \zeta_0 dz^0 + \zeta_1 dz^1 + \cdots + \zeta_n dz^n.$$

Die komplexe Kontaktstruktur auf M erhält man analog zum Beispiel (1).

Für kompakte komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten, die eine Kähler–Einstein-Metrik positiver Skalarkrümmung besitzen (was für die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren notwendig Voraussetzung ist), lassen sich noch einige spezielle Aussagen machen.

Die komplexe Dimension einer komplexen Kontaktmannigfaltigkeit ist notwendigerweise ungerade, d.h. $\dim_{\mathbb{C}} M = 2n+1$. Wie schon gezeigt, besitzt M für $n \equiv 1(2)$ eine natürliche Spinstruktur. Der nächste Satz behandelt den Fall $n \equiv 0(2)$ unter der Voraussetzung, daß eine Spinstruktur existiert.

Satz 3.6. *Sei (M^{2m}, g, J) eine kompakte Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2n+1$ (n gerade) mit positiver Skalarkrümmung. Besitzt M eine komplexe Kontaktstruktur und ist außerdem eine Spin–Mannigfaltigkeit, so ist M biholomorph äquivalent zum komplex–projektiven Raum $\mathbb{C}P^m$.*

Beweis. Da M eine komplexe Kontaktstruktur besitzt, folgt aus Satz 3.2

$$c_1(M) \quad = \quad -\, c_1(K) \quad = \quad (n+1)\,\alpha,$$

wobei α die erste Chern–Klasse des Linienbündels $L_{\mathbb{C}}^*$ bezeichnet. Somit ist α eine Kohomologie-Klasse in $H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$. Die Ricci-Form ρ von M liefert einen Repräsentanten der ersten Chern–Klasse. Da M als Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung vorausgesetzt war, ist ρ ein positives Vielfaches der (positiven) Kähler-Form Ω. Damit sind $c_1(M)$ und α positive Kohomologieklassen. Die Mannigfaltigkeit M soll eine Spin–Struktur besitzen, es gilt also $c_1(M) \equiv 0(2)$. Da aber laut Voraussetzung (n+1) ungerade ist, erhält man

$$c_1(M) \quad = \quad 2(n+1)\,\alpha' \quad = \quad (m+1)\,\alpha',$$

wobei α' wieder eine positive Klasse in $H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ ist. Die Behauptung des Satzes ergibt sich damit aus dem folgenden Theorem von S. Kobayashi und T. Ochiai (vgl. [KO73]). □

Fakt 3.1. *Sei M eine kompakte Kählersche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension m. Existiert dann ein positives Element $\alpha \in H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ derart, daß*

$$c_1(M) \quad \geq \quad (m+1)\,\alpha$$

gilt, so ist M biholomorph zum komplex–projektiven Raum $\mathbb{C}P^m$.

Der zitierte Fakt ist eine Folgerung aus dem etwas allgemeineren Theorem 1.1 der angegebenen Arbeit.

Ebenfalls aus diesem Theorem von S . Kobayashi und T. Ochiai erhält man, daß das Linienbündel $L_{\mathcal{C}}$ unter den obigen Voraussetzungen eine maximale Wurzel aus dem kanonischen Bündel ist.

Satz 3.7. *Sei $(M,\mathcal{C})$ eine kompakte komplexe Kontaktmannigfaltigkeit der komplexen Dimension $2n{+}1$. Außerdem besitzte M eine Kähler–Einstein–Metrik positiver Skalarkrümmung und sei verschieden vom komplex projektiven Raum. Dann ist $n+1$ das Maximum der ganzen Zahlen l, für die $\frac{1}{l}\,c_1(M)$ eine ganzzahlige Kohomologieklasse ist.*

Beweis. Angenommen, die erste Chern–Klasse ist durch eine Zahl l mit $l > n+1$ teilbar. Aus der Voraussetzung folgt, daß $c_1(M)$ auch durch $n+1$ teilbar ist. Insgesamt ergibt sich damit, daß $c_1(M)$ durch eine Zahl teilbar ist, die größer gleich $2(n+1)$ ist, und man kann genauso wie im vorigen Satz schließen. □

Aus der Arbeit [FK90] von Th. Friedrich und I. Kath erhält man aus diesem Satz sofort eine Aussage über die Mannigfaltigkeit $Q_{\mathcal{C}}$, d.h. über den Totalraum des zur Kontaktstruktur $\mathcal{C}$ assoziierten S^1–Hauptfaserbündels.

Folgerung 3.8. *Sei $(M,\mathcal{C})$ eine Mannigfaltigkeit wie in Satz 3.7. Dann ist $Q_{\mathcal{C}}$ eine einfach zusammenhängende Einstein–Sasaki–Mannigfaltigkeit mit einer natürlichen Spin–Struktur. Insbesondere existiert auf $Q_{\mathcal{C}}$ ein reeller Killing–Spinor.*

Zum Schluß sei noch ein Satz von A. Swann zitiert, der die Mannigfaltigkeit $P_{\mathcal{C}}$ beschreibt, d.h. den Totalraum des zu $\mathcal{C}$ assoziierten $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündels (siehe [Swa91]).

Satz 3.9. *Sei $(M,\mathcal{C})$ eine Mannigfaltigkeit wie in Satz 3.7. Dann existiert auf der Mannigfaltigkeit $P_{\mathcal{C}}$ eine Hyper–Kähler–Metrik mit einer $U(1)$–Symmetrie.*

Bemerkung. *Aus der speziellen Form der Hyper–Kähler–Metrik auf $P_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{C}} \times \mathbb{R}^+$ und einer Konstruktion von Ch. Bär (siehe* [Bär93]*) folgt, daß auf $Q_{\mathcal{C}}$ eine Sasaki–3–Struktur existiert.*

3.2. Homogene komplexe Kontaktstrukturen . Sei $(M, \mathcal{C})$ eine komplexe Kontaktmannigfaltigkeit. Ein holomorpher Diffeomorphismus $\phi : M \to M$ heißt *komplexer Kontaktautomorphismus*, falls ϕ die komplexe Kontaktstruktur erhält, d.h., für jede lokale Kontaktform ω_i aus $\mathcal{C}$ ist auch $\phi^*\omega_i$ wieder eine lokale Kontaktform aus $\mathcal{C}$. Äquivalent dazu ist, daß das Differential $\phi_* : TM^{1,0} \to TM^{1,0}$ einen Isomorphismus $L^*_{\mathcal{C}} \to L^*_{\mathcal{C}}$ induziert.

Komplexe Kontaktautomorphismen sind genau die Transformationen, die von Bündelautomorphismen des $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündels $P_{\mathcal{C}}$ induziert werden, die die Form ω invariant lassen. Die Gruppe aller komplexer Kontaktautomorphismen von $(M, \mathcal{C})$ wird mit $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{C})$ bezeichnet. Für kompakte Mannigfaltigkeiten ist $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{C})$ eine komplexe Liesche Gruppe, die analytisch auf M und $P_{\mathcal{C}}$ wirkt (vgl. [Boo61]).

Man nennt $(M; \mathcal{C})$ eine *homogene komplexe Kontaktmannigfaltigkeit* , falls $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{C})$ transitiv auf M wirkt.

Die kompakten, einfach zusammenhängenden komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten wurden von Boothby vollständig klassifiziert (vgl. [Boo61], [Wol65]). Sie lassen sich folgendermaßen beschreiben.

Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe einfache Lie–Algebra mit Cartan–Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ und der Wurzelraumzerlegung

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{h} \,\oplus\, \sum_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}^\alpha .$$

Dabei ist $\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \;:\; \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X \quad \text{für alle} \quad H \in \mathfrak{h}\}$ und $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsytem von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$, d.h. die Menge aller $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$.

Die Killing–Form B von $\mathfrak{g}$ ordnet jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ einen Vektor $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ zu, der definiert ist durch $B(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ für alle $H \in \mathfrak{h}$. Dadurch induziert die Killing–Form ein Skalarprodukt auf den Wurzeln, man setzt $(\alpha, \beta) := B(H_\alpha, H_\beta)$.

Auf der (reellen) linearen Hülle der Elemente aus Φ fixiert man jetzt eine lexikographische Ordnung und bezeichnet mit Φ^+ bzw. Φ^- die positiven bzw. negativen Wurzeln. Sei γ eine maximale Wurzel bezüglich dieser Ordnung. Die Wurzel γ ist dann auch höchstes Gewicht der adjungierten Darstellung und wird durch das folgende Lemma charakterisiert (siehe [Wol65]).

Lemma 3.10. *Sei β eine Wurzel einer komplexen einfachen Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ mit fixierter Cartan–Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Dann ist β maximal bezüglich einer Ordnung genau dann, wenn* $\mathrm{ad}(H_\beta)$ *außerhalb von $\mathfrak{g}^\beta \oplus \mathfrak{g}^{-\beta}$ die Eigenwerte $-\frac{1}{2}|\beta|^2$, 0 und $\frac{1}{2}|\beta|^2$ hat.*

Beweis. Für den Beweis benötigt man den Begriff der β–Kette durch α (siehe [Hel78]). Man bezeichnet damit die Serie von Wurzeln $\alpha + t\beta$ mit $-r \leq t \leq s$, die je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in \Phi$ zugeordnet ist. Diese Ketten sind ununterbrochen und für die maximale, d.h. nicht mehr verlängerbare, gilt

$$\tfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \;=\; r - s.$$

Sei β eine maximale Wurzel und $\alpha \in \Phi^+$, $\alpha \neq \beta$, dann ist $\alpha + \beta$ keine Wurzel, $\alpha - \beta$ kann eine Wurzel sein und $\alpha - 2\beta$ ist wieder keine Wurzel, da sonst $\alpha - \beta \in \Phi^-$ und damit ist

$\beta + (\beta - \alpha)$ eine Wurzel, im Widerspruch zur Maximalität. Es gilt also $s = 0$ und $r \in \{0, 1\}$. Für $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ mit $\alpha \neq \beta$ folgt hieraus

$$\mathrm{ad}(H_\beta)\, X_\alpha \;=\; (\alpha, \beta)\, X_\alpha \;=\; \begin{cases} 0 & \alpha - \beta \notin \Phi \\ \frac{1}{2}\,|\beta|^2 & \alpha - \beta \in \Phi. \end{cases}$$

Für $\alpha \in \Phi^-$ erhält man entsprechend die Eigenwerte $-\frac{1}{2}\,|\beta|^2$ und 0. Der zweite Teil des Lemmas soll hier nicht bewiesen werden, da er im weiteren nicht mehr benötigt wird (siehe [Wol65]). $\square$

Definiert man

$$\mathfrak{u} \;:=\; \mathfrak{h} \,\oplus \sum_{\substack{\alpha \\ (\alpha,\gamma)\geq 0}} \mathfrak{g}^\alpha,$$

so ist $\mathfrak{u}$ eine parabolische Unteralgebra in $\mathfrak{g}$. Sei G die zusammenhängende komplexe Liesche Gruppe mit der Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ und sei U die der Unteralgebra $\mathfrak{u}$ entsprechende Liesche Gruppe, dann ist der Quotient

$$M \;:=\; G/U \tag{3.2}$$

eine kompakte, einfach zusammenhängende Kählersche Mannigfaltigkeit. M ist eine Flaggenmannigfaltigkeit und wird als *Kähler–C–Raum vom Boothby–Typ* bezeichnet. Durch die Realisierung (3.2) wird auf M eine kanonische komplexe Struktur definiert, die gegeben ist durch den Isomorphismus

$$T_{eU}M^{1,0} \;\cong\; \sum_{\substack{\alpha \\ (\alpha,\gamma)<0}} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Die angegebene Definition der Mannigfaltigkeit M entspricht einem allgemeinen Konstruktionsprinzip für Flaggenmannigfaltigkeiten (siehe [BR90], [Wal73]).

Lemma 3.11. *Die Mannigfaltigkeit M hat ungerade komplexe Dimension. In $T^{1,0}_{eU}M$ existiert eine orthonormale Basis $\{\mathrm{f}_j\}$, $j = 1, \ldots, 2n+1 = \dim_{\mathbb{C}} M$, die den folgenden Kommutatorrelationen genügt:*

$$[\mathrm{f}_i, \mathrm{f}_{n+i}] = \mathrm{f}_{2n+1}, \quad [\mathrm{f}_i, \bar{\mathrm{f}}_{2n+1}] = -\,\bar{\mathrm{f}}_{n+i}, \quad [\mathrm{f}_{n+i}, \bar{\mathrm{f}}_{2n+1}] = \bar{\mathrm{f}}_i.$$

Beweis. Bezeichne Ψ^+ die Menge aller Wurzeln α mit $(\alpha, \gamma) < 0$. Es ist dies auch die Menge der komplementären Wurzeln (vgl. 2.1). Aus Lemma 3.10 folgt dann

$$\Psi^+ \;=\; \{-\gamma\} \cup \{\alpha \;:\; (\alpha, \gamma) = -\tfrac{1}{2}\,|\gamma|^2\}.$$

Auf der Menge $\Psi^+ - \{-\gamma\}$ ist durch die Zuordnung $\alpha \mapsto \widehat{\alpha} := -\alpha - \gamma$ eine Involution definiert. Es gilt $\widehat{\alpha} \neq \alpha$, da $2\alpha \notin \Phi$, und $(\widehat{\alpha}, \gamma) = -(\alpha, \gamma) - |\gamma|^2 = -\frac{1}{2}\,|\gamma|^2$, d.h. $\widehat{\alpha} \in \Psi^+$. Damit folgt $\#(\Psi^+) \equiv 1(2)$ und M hat ungerade komplexe Dimension.

In $\mathfrak{g}$ läßt sich eine Basis $\{X_\alpha\}$ aus Wurzelvektoren wählen, die die folgenden Eigenschaften hat (siehe [Hel78]):

$$\begin{array}{lll} X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha & \text{und} & [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha, \\ [X_\alpha, X_\beta] = 0 & \text{für} & \alpha+\beta \neq 0 \quad \text{und} \quad \alpha+\beta \notin \Phi, \\ [X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, X_{\alpha+\beta} & \text{für} & \alpha+\beta \in \Phi. \end{array}$$

Weiter gilt $N^2_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\, s\,(r+1)|\alpha|^2$, wobei $\beta + t\alpha$ mit $-r \leq t \leq s$ die α–Kette durch β ist.

Die Bedingung $(\alpha,\gamma) = -\frac{1}{2}\,|\gamma|^2$ für $\alpha \in \Psi^+ - \{-\gamma\}$ zeigt, daß mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \Psi^+ - \{-\gamma\}$ die Summe $\alpha_1 + \alpha_2$ nur dann eine Wurzel ist und somit in Ψ^+ liegt, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = -\gamma$ gilt. Somit hat man für die Kommutatoren drei Möglichkeiten

$$[X_{\widehat{\alpha}}, X_\alpha] = c_1\, X_{-\gamma}, \quad [X_{\widehat{\alpha}}, X_\gamma] = c_2\, X_{-\alpha}, \quad [X_\alpha, X_\gamma] = c_3\, X_{-\widehat{\alpha}}\,.$$

Die Koeffizienten c_j sind bis auf ein Vorzeichen durch die angegebene Formel für $N^2_{\alpha,\beta}$ bestimmt. Benutzt man noch die Beziehung $|\widehat{\alpha}|^2 = |-\alpha-\gamma|^2 = |\alpha|^2 + 2(\alpha,\gamma) + |\gamma|^2 = |\alpha|^2$, so erhält man die gesuchten Kommutatorrelationen durch geeignete Normierung. □

Als nächstes definiert man eine Unteralgebra $\mathfrak{u}_1$ in $\mathfrak{g}$ durch

$$\mathfrak{u}_1 \;:=\; \{X \in \mathfrak{u} \;:\; B(X, H_\gamma) = 0\}.$$

Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{u}_1$ gleich dem Zentralisator eines von Null verschiedenen Elements $X_\gamma \in \mathfrak{g}^\gamma$. Für die entsprechende Untergruppe U_1 gilt $U/U_1 \cong \mathbb{C}^*$, da $\mathfrak{u} = \mathbb{C}H_\gamma \oplus \mathfrak{u}_1$. Setzt man $P := G/U_1$, so definiert die Projektion

$$\pi : P = G/U_1 \;\longrightarrow\; M = G/U$$

ein holomorphes $\mathbb{C}^*$–Hauptfaserbündel. Der (holomorphe) Tangentialraum von P an der Stelle eU_1 kann identifiziert werden mit

$$\mathbb{C}H_\gamma \oplus \sum_{\substack{\alpha \\ (\alpha,\gamma)<0}} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Die Abbildung $X \mapsto B(X, X_\gamma)$ definiert auf $T_{eU_1}P$ eine $\mathrm{Ad}(U_1)$–invariante Linearform, die somit eine G–invariante holomorphe 1–Form ω auf P induziert. (An dieser Stelle ist die Beziehung $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = B(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha$ zu berücksichtigen (siehe [Hel78], Kap. III)). Man prüft leicht nach, daß ω die Bedingungen (i) – (iii) von Satz 3.3 erfüllt, wobei n durch $\dim_{\mathbb{C}} M = 2n+1$ gegeben ist. Damit liefert ω eine komplexe Kontaktstruktur auf M, und es gilt (siehe [Wol65])

$$G = \mathrm{Aut}_0(M, \mathcal{C}),$$

wobei $\mathrm{Aut}_0(M,\mathcal{C})$ die Zusammenhangskomponente der Eins in der Gruppe der Kontaktautomorphismen bezeichnet.

Umgekehrt hat W. Boothby gezeigt, daß sich jede kompakte einfach zusammenhängende homogene komplexe Kontaktmannigfaltigkeit mit Hilfe der oben beschriebene Methode konstruieren läßt (siehe [Boo61]).

Es sei jetzt noch ein Theorem von T. Nitta und M. Takeuchi zitiert, das zeigt, daß die komplexe Kontaktstruktur auf den Kähler C–Räumen vom Boothby–Typ eindeutig bestimmt ist (siehe [NT87]). Dazu bezeichne $\mathcal{C}(M)$ die Menge der komplexen Kontaktstrukturen auf M. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(M)$ aller holomorphen Transformationen von M wirkt dann auf natürliche Weise auf $\mathcal{C}(M)$.

Fakt 3.2. *Sei $(M, \mathcal{C})$ eine kompakte komplexe Kontaktmannigfaltigkeit. Ist M zusätzlich eine Kähler–Mannigfaltigkeit mit $H_1(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$, so wirkt $\mathrm{Aut}(M)$ transitiv auf $\mathcal{C}(M)$.*

Die Flaggenmannigfaltigkeit M läßt sich auch als Quotient reeller Liescher Gruppen darstellen. Dazu sei $G^{\mathbb{R}} \subset G$ eine reelle Form der komplexen Lieschen Gruppe G derart, daß $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ eine reelle Form von $\mathfrak{h}$ ist. Setzt man dann $K := G^{\mathbb{R}} \cap G$, so gilt

$$M \;=\; G/U \;=\; G^{\mathbb{R}}/K.$$

Weiter gilt $\mathfrak{k} = \mathfrak{u} \cap \bar{\mathfrak{u}}$ und man findet somit

$$\mathfrak{k} \;=\; \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\substack{\alpha \\ (\alpha,\gamma)=0}} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Insbesondere folgt daraus, daß $\mathfrak{k}$ Zentralisator der Lie–Algebra $t_0 := \mathbb{R}\, iH_\gamma$ ist.

Beispiel. *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n{+}2, \mathbb{C})$ mit reeller Form $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(n{+}2)$ und dem üblichen Wurzelsystem (siehe Anhang C). Dann ist $\gamma = (-1, 0, \ldots, 0, 1) = \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_1$ eine maximale Wurzel und für $i = 1, \ldots, n$ sind $\alpha_i := \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{i+1}$ und $\beta_i := \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_1$ zusammen mit $-\gamma$ gerade die Wurzeln α mit $(\alpha, \gamma) < 0$. Man sieht also, daß man genau in der Situation des im Kapitel 2 betrachteten Beispiels ist.*

Benutzt man die angegebene Konstruktion, so erhält man für die klassischen einfachen Lie–Algebren die folgenden homogenen komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten:

- $Sp(n+1)/Sp(n) \times U(1) \quad \cong \quad \mathbb{C}P^{2n+1}$,
- $SU(n+2)/S(U(n) \times U(1) \times U(1))$,
- $SO(n+4)/S(O(n) \times O(3) \times O(2))$.

All diese Mannigfaltigkeiten sind kompakte Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalarkrümmung und komplexer Dimension $2n + 1$.

Für die Ausnahmealgebren erhält man die folgenden homogenen komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten:

$$F_4/Sp(3) \times U(1), \qquad G_2/SO(3) \times U(1),$$
$$E_6/SU(6) \times U(1), \qquad E_7/SO(12) \times U(1), \qquad E_8/E_7 \times U(1).$$

3.3. Twistorräume quaternionisch–Kählerscher Mannigfaltigkeiten. Eine weitere Klasse von Beispielen komplexer Kontaktmannigfaltigkeiten liefern die Twistorräume quaternionisch–Kählerscher Mannigfaltigkeiten, die in diesem Abschnitt beschrieben werden sollen.

Eine *quaternionisch–Kählersche Mannigfaltigkeit* ist eine $4k$–dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g), deren lineare Holonomie–Gruppe sich von $O(4k)$ auf $Sp(k)Sp(1) = (Sp(k) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2$ reduzieren läßt.

Äquivalent dazu ist die Existenz einer offenen Überdeckung $\{U_i\}$ und fast komplexer Strukturen I, J auf U_i, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) g ist hermitesch bezüglich I und J,
(2) $I \circ J = - J \circ I$,
(3) Für jedes $x \in U_i \cap U_j$ stimmen die von I, J und$K := I \circ J$ erzeugten Unterräume in $\mathrm{End}(T_xM)$ für i und j überein. Die lokal gegebenen komplexen Strukturen erzeugen somit ein global definiertes Rang–3–Unterbündel $E \subset \mathrm{End}(TM)$.
(4) Der Levi–Civita–Zusammenhang läßt das Bündel E invariant, d.h. die kovariante Ableitung von I, J und K ist wieder eine Linearkombination von I, J und K,

Die Bezeichnung ist etwas ungünstig, da quaternionisch–Kählersche Mannigfaltigkeiten im allgemeinen keine Kählerschen Mannigfaltigkeiten sind. Das folgende Resultat geht auf D. Alekseevskii bzw. S. Ishihara zurück (siehe [Ale68] und [Ish74])

Fakt 3.3. *Jede quaternionisch–Kählersche Mannigfaltigkeit ist eine irreduzible Einstein–Mannigfaltigkeit.*

Das Einheitssphärenbündel in E wird als der *Twistorraum* der quaternionisch–Kählerschen Mannigfaltigkeit M bezeichnet. Der Twistorraum Z ist also eine $\mathbb{C}P^1$–Faserung $\pi : Z \longrightarrow M$ über M, und man zeigt, daß er eine natürliche komplexe Struktur besitzt (siehe [Sal82]).

Der Levi–Civita Zusammenhang induziert eine Zerlegung $T^{1,0}Z = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, die verträglich mit der komplexen Struktur ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{V}$ die vertikale Distribution, die tangential zu den Fasern von π ist, und $\mathcal{H}$ die komplementäre horizontale Distribution. Die Projektion auf das komplexe Linienbündel $\mathcal{V}$ liefert eine holomorphe 1–Form mit Werten in $\mathcal{V}$. Fixiert man eine lokale Trivialisierung von $\mathcal{V}$, so erhält man ein System lokaler holomorpher 1–Formen. Dieses definiert eine komplexe Kontaktstruktur $\mathcal{C}$, falls die Skalarkrümmung der quaternionisch–Kählerschen Mannigfaltigkeiten von Null verschieden ist. Es gilt $\mathcal{V} \cong L^*_{\mathcal{C}}$ (siehe [Bes88]).

Auf dem Twistorraum einer quaternionisch–Kählerschen Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung existiert eine eindeutig bestimmte Metrik g_Z für die π eine Riemannsche Submersion mit total–geodätischen Fasern ist. Die Fasern sind dabei isometrisch zur Standard–Sphäre S^2. Unter Ausnutzung der O'Neillschen Formeln zeigt man, daß g_Z eine Kähler–Einstein–Metrik ist (siehe [Sal82], [Bes88]). Insgesamt erhält man also das folgende Resultat:

Fakt 3.4. *Sei (M, g) eine quaternionisch–Kählersche Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung. Dann ist der Twistorraum Z von M eine Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit mit einer komplexen Kontaktstruktur.*

Die einzigen bekannten Mannigfaltigkeiten, die die Voraussetzungen von Fakt 3.4 erfüllen, sind die kompakten symmetrischen quaternionisch–Kählerschen Mannigfaltigkeiten. Diese wurden von J.A. Wolf vollständig klassifiziert (siehe [Wol65]). Insbesondere beweist er, daß sie über die Twistorfaserung in einer bijektiven Beziehung zu den einfach zusammenhängenden kompakten homogenen komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten stehen.

Somit liefert die Betrachtung der Twistorräume von quaternionisch–Kählerschen Mannigfaltigkeiten vorerst nur die schon im vorigen Kapitel behandelten Beispiele von komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten.

4. Kählersche Killing–Spinoren

Dieses Kapitel stellt den Hauptteil der Arbeit dar. In ihm wird gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen auf komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten Kählersche–Killing Spinoren existieren. Ein analoges Existenzresultat wird auf Mannigfaltigkeiten mit einer verallgemeinerten komplexen Kontaktstruktur bewiesen. Umgekehrt wird gezeigt, daß sich aus jedem Kählerschen Killing–Spinor eine bestimmte verallgemeinerte Kontaktstruktur konstruieren läßt. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind zum Teil schon in [KS94] enthalten.

4.1. Killing–Spinoren auf komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten. Dieser Abschnitt stellt eine Art Vorbemerkung dar. In ihm wird die Konstruktion eines Kählerschen Killing–Spinors auf einer komplexen Kontaktmannigfaltigkeit vorgestellt.

Sei (M, g, J) eine Kählersche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k + 1$ mit $k \equiv 1(2)$. Auf M sei die Existenz einer komplexen Kontaktstruktur $\mathcal{C} = \{U, \theta_U\}$ vorausgesetzt. Wie schon gezeigt (vgl. Satz 3.2), besitzt dann M eine kanonische Spinstruktur

$$K^{1/2} \quad \cong \quad S_0 \quad \cong \quad L_{\mathcal{C}}^{(k+1)/2}. \tag{4.1}$$

Zuerst betrachtet man die lokale Form

$$\theta_U^{(k+1)/2} \;\in\; \Gamma(L_{\mathcal{C}}^{(k+1)/2}|_U),$$

wobei U ein offene Menge aus $\mathcal{C}$ ist. Aus dem Isomorphismus (4.1) folgt, daß diese Form einen lokalen Schnitt im Bündel S_0 definiert, der mit Ψ_θ bezeichnet sei. Als nächstes sei $\omega_U \;:=\; \theta_U \,\wedge\, (\partial\,\theta_U)^{(k-1)/2}$, dann ist ω_U eine (lokale) k–Form, und $\bar{\omega}_U \cdot \Psi_\theta$ definiert einen Schnitt in $S_k|_U$.

Definition 4.1. *Der zur komplexen Kontaktstruktur $(M, \mathcal{C})$ assoziierte Spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ ist gegeben durch*

$$\Psi_{\mathcal{C}}\,\big|_U \;:=\; |\Psi_\theta|^{-2}\,\bar{\omega}_U \cdot \Psi_\theta, \tag{4.2}$$

wobei U eine beliebige Menge aus $\mathcal{C}$ ist.

Man hat jetzt noch zu zeigen, daß die Definition korrekt ist, d.h., daß $\Psi_{\mathcal{C}}$ tatsächlich global definiert ist. Dazu sei $(U', \theta') \in \mathcal{C}$ mit $U \cap U' \neq 0$. Dann existiert eine holomorphe Funktion f auf $U \cap U'$ mit $\theta' = f\theta$. Daraus folgt $\quad \Psi_{\theta'} = f^{\,(k+1)/2}\,\Psi_\theta \quad$ und $\theta' \wedge (\partial\,\theta')^{(k-1)/2} = f\theta \wedge (\partial f \wedge \theta + f\theta)^{(k-1)/2} = f^{(k+1)/2}\,\theta \wedge (\partial\,\theta)^{(k-1)/2}$ und somit auch

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathcal{C}}\,\big|_{U'} \;&=\; |\Psi_{\theta'}|^{-2}\,\bar{\omega}'_U \;\cdot\; \Psi_{\theta'}\\
&=\; (\,f\,\bar{f}\,)^{-(k+1)/2}|\Psi_\theta|^{-2}\;\bar{f}^{(k+1)/2}\,\bar{\omega}_U \;\cdot\; f^{(k+1)/2}\,\Psi_\theta\\
&= \Psi_{\mathcal{C}}\,\big|_U.
\end{aligned}$$

Der Spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ ist ein Schnitt in S_k, da $\theta_U \,\wedge\, (\partial\,\theta_U)^{(k-1)/2}$ eine über U definierte (k,0)-Form ist.

Satz 4.2. *Sei (M, g, J) eine geschlossene Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$ (k ungerade) mit positiver Skalarkrümmung. Besitzt M eine komplexe Kontaktstruktur, so ist M eine Spin–Mannigfaltigkeit, und es existiert auf M ein Kählerscher Killing–Spinor.*

Der Beweis dieses Satzes sei auf den nächsten Abschnitt verschoben, da er völlig analog ist zum Beweis der entsprechenden Aussage für Mannigfaltigkeiten mit einer verallgemeinerten Kontaktstruktur und aus diesem als Spezialfall folgt (dort als Folgerung 4.10).

An dieser Stelle seien noch einmal alle neuen Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit Kählerschen Killing–Spinoren aufgeführt, die man als Folgerung aus diesem Satz und aus den Überlegungen des vorigen Kapitels erhält.

Folgerung 4.3. *Auf den folgenden kompakten homogenen Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeiten existieren Kählerschen Killing–Spinoren:*

- $SU(n+2)/S(U(n) \times U(1) \times U(1))$,
- $SO(n+4)/S(O(n) \times O(3) \times O(2))$,
- $F_4/Sp(3)U(1)$.

Dabei n als ungerade vorausgesetzt ist. Die Mannigfaltigkeit $F_4/Sp(3)U(1)$ ist komplex 15–dimensional.

4.2. Verallgemeinerte Kontaktstrukturen. Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit ungerader komplexen Dimension m und r eine fixierte ungerade Zahl. Eine *komplexe r–Kontaktstruktur* wird als ein Familie $\mathcal{C} = \{U_i, \omega_i\}$ definiert, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $\{U_i\}$ ist ein offene Überdeckung von M.

(ii) ω_i ist eine holomorphe r-Form auf U_i.

(iii) $\omega_i \wedge (\partial\omega_i)^s \in \Gamma(\Lambda^{m,0}|_U)$ ist nirgends Null auf U_i, wobei $s := \frac{m-r}{r+1}$.

(iv) Ist $U_i \cap U_j \neq 0$, so existiert eine holomorphe Funktion f auf $U_i \cap U_j$ mit $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ auf $U_i \cap U_j$.

(v) Die Familie $\mathcal{C}$ ist maximal bezüglich dieser Eigenschaften.

Für $r = 1$ stimmt diese Definition mit der üblichen Definition einer komplexen Kontaktstruktur überein.
Eine solche Struktur existiert offensichtlich nur, wenn $s = (m-r)/(r+1)$ eine ganze Zahl ist. Insbesondere ist es notwendig, daß die komplexe Dimension von M ungerade ist.

Sei $\mathcal{C} = \{(U_i, \omega_i)\}$ eine komplexe r–Kontaktstruktur. Dann existiert ein dazu assoziiertes holomorphes Linienbündel $L_\mathcal{C} \subset \Lambda^{r,0}(M)$ mit Übergangsfunktionen $\{f_{ij}^{-1}\}$. Analog zum Fall komplexer Kontaktstrukturen (siehe Satz 3.2) läßt sich der folgende Satz beweisen.

Satz 4.4. *Sei $(M, \mathcal{C})$ eine Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$ mit einer komplexen r–Kontaktstruktur. Dann ist das holomorphe Linienbündel $L_\mathcal{C}$ eine $(s+1)$-ste Wurzel des kanonischen Bündels $K = \Lambda^{m,0} M$ von M, d.h. es gilt*

$$L_\mathcal{C}^{s+1} \;\cong\; K,$$

wobei $s = (m-r)/(r+1)$. Insbesondere besitzt M eine kanonische Spinstruktur, falls s eine ungerade Zahl ist oder, äquivalent dazu, falls $k+1$ durch $r+1$ teilbar ist.

Im weiteren sei s als ungerade Zahl vorausgesetzt. Damit ist die Existenz einer kanonischen Spinstruktur gesichert. Der nächste Satz erlaubt es, sich auf die Untersuchung komplexer k–Kontaktstrukturen zu beschränken, wobei $m = 2k+1$ die komplexe Dimension von M ist.

Satz 4.5. *Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$. Besitzt M eine komplexe r–Kontaktstruktur derart, daß $s = (m-r)/(r+1)$ eine ungerade Zahl ist, so besitzt M auch eine k–Kontaktstruktur.*
Insbesondere folgt, daß jede komplexe Kontaktmannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$ mit ungeradem k eine komplexe k–Kontaktstruktur besitzt.

Beweis. Gegeben sei eine komplexe r–Kontaktstruktur $\{(U_i, \omega_i)\}$ auf M. Die gesuchte k–Kontaktstruktur $\{(U_i, \omega_i')\}$ wird definiert durch $\omega_i' := \omega_i \wedge (\partial\omega_i)^{\frac{s-1}{2}}$.
Aufgrund von $\frac{s-1}{2} = \frac{k-r}{r+1}$ ist ω_i' eine holomorphe Form vom Grad $r+(r+1)\frac{k-r}{r+1} = k$. Bedingung (iii) ist erfüllt, da

$$\omega_i' \wedge \partial\omega_i' = (\omega_i \wedge (\partial\omega_i)^{\frac{s-1}{2}}) \wedge (\partial\omega_i)^{\frac{s+1}{2}} = \omega_i \wedge (\partial\omega_i)^s \neq 0 \quad .$$

Die folgende Rechnung bestätigt die Bedingung (iv):

$$\begin{aligned} \omega_i' &= \omega_i \wedge (\partial\omega_i)^{\frac{s-1}{2}} \\ &= f_{ij}\,\omega_j \wedge (\partial(f_{ij}\omega_j))^{\frac{s-1}{2}} \\ &= f_{ij}\,\omega_j \wedge (\partial f_{ij} \wedge \omega_j + f_{ij}\partial\omega_j)^{\frac{s-1}{2}} \\ &= f_{ij}^{\frac{s+1}{2}}\,\omega_j'. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Voraussetzung benutzt, daß ω_i eine Form von ungeradem Grad ist ($\omega_i \wedge \omega_i = 0$), und daß f_{ij} holomorphe Funktionen sind.

Aus der Voraussetzung $s \equiv 1(2)$ oder, äquivalent dazu, $k+1 \equiv 0\,(r+1)$ ergibt sich, daß k ungerade ist, was notwendig für die Definition einer komplexen k–Kontaktstruktur war. □

Sei jetzt (M, g, J) eine Kähler–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$ (k ungerade), auf der eine komplexe k–Kontaktstruktur $\mathcal{C} = \{(U_i, \omega_i)\}$ existiert. Assoziiert zu $\mathcal{C}$ hat man das holomorphe Linienbündel $L_{\mathcal{C}} \subset \Lambda^{k,0}(M)$, und $L_{\mathcal{C}}$ definiert eine kanonische Spinstruktur

$$L_{\mathcal{C}} \quad \cong \quad K^{1/2} \quad \cong \quad S_0. \tag{4.3}$$

Wie schon im Fall der gewöhnlichen komplexen Kontaktstrukturen, kann man auch einer k–Kontaktstruktur $\mathcal{C}$ einen Spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ zuordnen. Sei $(U, \omega) \in \mathcal{C}$, dann liefert ω mittels der Identifizierung (4.3) einen Schnitt Ψ_ω in $S_0\,\big|_U$, und man definiert $\Psi_{\mathcal{C}}$ über U durch

$$\Psi_{\mathcal{C}}\,\big|_U \;:=\; |\Psi_\omega|^{-2}\,\bar{\omega}\;\cdot\;\Psi_\omega\;. \tag{4.4}$$

Auch hier überzeugt man sich wieder leicht davon, daß Ψ_ω in der Tat global definiert ist.

Im folgenden soll, unter gewissen Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit M, aus dem Spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ ein Kählerscher Killing–Spinor konstruiert werden. Die Konstruktion beruht im wesentlichen auf dem folgenden Satz, der insbesondere einen Ausdruck für $D^2\Psi_{\mathcal{C}}$ angibt.

Satz 4.6. *Der Spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\Psi_{\mathcal{C}}$ hat auf M keine Nullstellen.*

(ii) *$\Psi_{\mathcal{C}}$ ist ein anti-holomorpher Schnitt, d.h. $\nabla_Z \Psi_{\mathcal{C}} = 0$ für alle $Z \in \Gamma(T^{1,0}M)$.*

(iii) *Es gilt $D_-\Psi_{\mathcal{C}} = 0$.*

(iv) *$\Psi_{\mathcal{C}}$ genügt der Gleichung*

$$D_- D_+ \Psi_{\mathcal{C}} \quad = \quad \frac{R}{4}\,\Psi_{\mathcal{C}} \;-\; \frac{i}{2}\,\rho\;\cdot\;\Psi_{\mathcal{C}},$$

wobei R die Skalarkrümmung und ρ die Ricci-Form von M bezeichnet.

Beweis. Sei $(U, \omega) \in \mathcal{C}$. Dann ist ω nirgends Null auf U, und aus der Definition (4.4) ergibt sich, daß auch $\Psi_{\mathcal{C}}$ keine Nullstellen auf U hat. Da die offenen Mengen von $\mathcal{C}$ eine Überdeckung der Mannigfaltigkeit M bilden, folgt hieraus die Behauptung (i).

Die k-Form ω und der ihr entsprechende Schnitt $\Psi_\omega \in \Gamma(S_0\,\big|_U)$ sind holomorph. Somit gilt für alle $Z \in \Gamma(\,T^{1,0}M\,)$

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{Z}}\,\omega &= 0, \\ \nabla_{\bar{Z}}\,\Psi_\omega &= 0, \\ \nabla_Z\,\Psi_\omega &= (\partial \log |\Psi_\omega|^2)(Z)\Psi_\omega\,. \end{aligned}$$

Unter Anwendung dieser Formeln berechnet man

$$\begin{aligned} \nabla_Z \Psi_{\mathcal{C}} &= \nabla_Z(|\Psi_\omega|^{-2}\,\bar{\omega}\,\Psi_\omega) \\ &= Z(|\Psi_\omega|^{-2})\,\bar{\omega}\,\Psi_\omega \;+\; |\Psi_\omega|^{-2}\,(\nabla_Z\bar{\omega})\,\Psi_\omega \;+\; |\Psi_\omega|^{-2}\,\bar{\omega}\,\nabla_Z\Psi_\omega \\ &= -|\Psi_\omega|^{-2}\,(\partial \log |\Psi_\omega|^2)(Z)\,\bar{\omega}\,\Psi_\omega \;+\; |\Psi_\omega|^{-2}\,\bar{\omega}\,(\partial \log |\Psi_\omega|^2)(Z)\,\Psi_\omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der Spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ ist also anti-holomorph, und aus der Definition von D_- folgt $D_-\Psi_{\mathcal{C}} = 0$ (siehe (1.17)). Damit sind die Behauptungen (ii) und (iii) bewiesen. Benutzt man Formel (1.25), so findet man

$$\begin{aligned} D_+\Psi_{\mathcal{C}} &= D_+(|\Psi_\omega|^{-2}\,\bar{\omega}\cdot\Psi_\omega) \\ &= \bar{\partial}(|\Psi_\omega|^{-2})\,\bar{\omega}\cdot\Psi_\omega \quad + \quad |\Psi_\omega|^{-2}\,D_+(\bar{\omega}\cdot\Psi_\omega) \\ &= -\bar{\partial}(\log|\Psi_\omega|^2)\cdot\Psi_{\mathcal{C}} \quad + \quad |\Psi_\omega|^{-2}\,(\bar{\partial}\bar{\omega})\cdot\Psi_\omega, \end{aligned}$$

und erhält hieraus die Gleichung

$$D_+\Psi_{\mathcal{C}} = -\bar{\partial}(\log|\Psi_\omega|^2)\cdot\Psi_{\mathcal{C}} \;+\; |\Psi_\omega|^{-2}\,(\bar{\partial}\bar{\omega})\cdot\Psi_\omega.$$

Da auch $\partial\omega$ eine holomorphe Form ist, sieht man (analog zum Beweis von (ii)), daß

$$\nabla_Z(|\Psi_\omega|^{-2}\,\bar{\partial}\bar{\omega}\cdot\Psi_\omega) = 0.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen und (ii) folgt jetzt

$$\nabla_Z(D_+\Psi_{\mathcal{C}}) = -\nabla_Z(\bar{\partial}\log|\Psi_\omega|^2)\Psi_{\mathcal{C}}.$$

Hiermit kann man $D_-D_+\Psi_{\mathcal{C}}$ berechnen, indem man die lokale Gestalt der Operatoren $D_\pm$ bezüglich des Repers $\{\mathrm{f}_i\}_{i=1\ldots m}$ verwendet.

$$\begin{aligned} D_-D_+\Psi_{\mathcal{C}} &= \sum_{i=1}^m \mathrm{f}^i\cdot\nabla_{\mathrm{f}_i}(D_+\Psi_{\mathcal{C}}) \\ &= -\sum_{i=1}^m \mathrm{f}^i\cdot\nabla_{\mathrm{f}_i}(\bar{\partial}\log|\Psi_\omega|^2)\cdot\Psi_{\mathcal{C}} \\ &= -\sum_{i=1}^m \Big(\mathrm{f}^i\wedge\nabla_{\mathrm{f}_i}(\bar{\partial}\log|\Psi_\omega|^2) \;-\; \mathrm{f}^i\lrcorner\,\nabla_{\mathrm{f}_i}(\bar{\partial}\log|\Psi_\omega|^2)\Big)\cdot\Psi_{\mathcal{C}} \\ &= -\,(\,\partial\bar{\partial}(\log|\Psi_\omega|^2) \;+\; \bar{\partial}^*\bar{\partial}(\log|\Psi_\omega|^2\,))\cdot\Psi_{\mathcal{C}}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Um hieraus (iv) abzuleiten, bemerkt man, daß Ψ_ω ein lokaler, nirgends verschwindender holomorpher Schnitt des hermiteschen Linienbündels $L_{\mathcal{C}}$ ist. In $L_{\mathcal{C}}$ ist der kanonische Zusammenhang fixiert, und somit ist $\bar{\partial}\partial(\log|\Psi_\omega|^2)$ gerade die Krümmungsform dieses Linienbündels. Außerdem hat man die Relation

$$-\,\partial\bar{\partial}(\,\log|\Psi_\omega|^2\,) = \bar{\partial}\partial(\,\log|\Psi_\omega|^2\,) = -\frac{i}{2}\,\rho, \tag{4.6}$$

da $L_{\mathcal{C}} \cong K^{1/2}$ gilt und da sich die Krümmungsform des kanonischen Bündels als $-i\,\rho$ ergibt. Bildet man die Spur und benutzt die Voraussetzung, daß M eine Kählersche Mannigfaltigkeit ist, so erhält man

$$\Delta\log|\Psi_\omega|^2 \quad = \quad 2\,\bar{\partial}^*\bar{\partial}(\,\log|\Psi_\omega|^2\,) \quad = \quad -\,\frac{R}{2}\quad. \tag{4.7}$$

Setzt man (4.6) und (4.7) in das Ergebnis der Rechnung (4.5) ein, so folgt die Behauptung (iv) und der Beweis von Satz 4.6 ist damit abgeschlossen. $\square$

Folgerung 4.7. *Sei (M, g, J) eine Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k + 1$ mit k ungerade, und sei $\mathcal{C}$ eine komplexe k–Kontaktstruktur auf M. Dann genügt der zu $\mathcal{C}$ assoziierte Spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ der Gleichung*

$$D^2\,\Psi_{\mathcal{C}} \;=\; D_-D_+\,\Psi_{\mathcal{C}} \;=\; \frac{m+1}{4m}\,R\,\Psi_{\mathcal{C}}.$$

Beweis. Aus Satz 4.6 folgt

$$\begin{aligned} D^2\Psi_{\mathcal{C}} &= D_-D_+\Psi_{\mathcal{C}} \\ &= -\tfrac{i}{2}\rho\cdot\Psi_{\mathcal{C}} \quad + \quad \tfrac{R}{4}\,\Psi_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Da (M, g) eine Einstein–Mannigfaltigkeit ist, gilt

$$\rho = \tfrac{R}{2m}\,\Omega.$$

Aus der Definition von $\Psi_{\mathcal{C}}$ (ω ist eine lokale (k,0)-Form) ersieht man sofort, daß $\Psi_{\mathcal{C}}$ ein Schnitt in S_k ist. Die Definition von S_k bedingt, daß

$$-i\,\Omega\cdot\Psi_{\mathcal{C}} = (m-2k)\,\Psi_{\mathcal{C}}.$$

Benutzt man diese Gleichung, so ergibt sich

$$-\tfrac{i}{2}\,\rho\cdot\Psi_{\mathcal{C}} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\,\tfrac{R}{2m}(m-2k)\,\Psi_{\mathcal{C}} \quad = \quad \tfrac{R}{4m}\,\Psi_{\mathcal{C}},$$

und damit folgert man aus Satz 4.6

$$D_-D_+\,\Psi_{\mathcal{C}} \quad = \quad (\tfrac{R}{4m} + \tfrac{R}{4})\,\Psi_{\mathcal{C}} \quad = \quad \tfrac{m+1}{4m}\,R\,\Psi_{\mathcal{C}}.$$

Da $D_-\,\Psi_{\mathcal{C}} = 0$ gilt, ist $\Psi_{\mathcal{C}}$ somit ein Eigenspinor von $D^2 \;=\; D_+D_- \;+\; D_-D_+$. $\square$

Folgerung 4.8. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in der Folgerung 4.7 sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung $R > 0$. Dann sind die Spinoren $\Psi_{\mathcal{C}}^{\pm} := \lambda_+\Psi_{\mathcal{C}} \pm D_+\Psi_{\mathcal{C}}$ Kählersche Killing–Spinoren zu den Killing–Zahlen $\mu_{\pm} = \pm\frac{\lambda_+}{m+1}$, mit $\lambda_+ = \sqrt{\frac{m+1}{4m}R}$.*

Beweis. Es gilt $\Psi_{\mathcal{C}}^{\pm} \neq 0$, da $\Psi_{\mathcal{C}}$ und $D_+\Psi_{\mathcal{C}}$ Schnitte in verschiedenen Unterbündeln $S_r \subset S$ sind. Die Spinoren $\Psi_{\mathcal{C}}^{\pm} \;=\; \lambda_+\Psi_{\mathcal{C}} \;\pm\; D_+\Psi_{\mathcal{C}} \;=\; \lambda_+\Psi_{\mathcal{C}} \;\pm\; D\Psi_{\mathcal{C}}$ sind Eigenspinoren von D zum Eigenwert $\pm\lambda_+$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} D\Psi_{\mathcal{C}}^{\pm} &= \lambda_+D\Psi_{\mathcal{C}} \;\pm\; D^2\Psi_{\mathcal{C}} \\ &= \lambda_+D\Psi_{\mathcal{C}} \;\pm\; (\lambda_+)^2\Psi_{\mathcal{C}} \\ &= \pm\lambda_+(\lambda_+\Psi_{\mathcal{C}} \;\pm\; D_+\Psi_{\mathcal{C}}) \\ &= \pm\lambda_+\Psi_{\mathcal{C}}^{\pm}. \end{aligned}$$

Die Zahl λ_+ ist gerade die untere Schranke für das Spektrum des Dirac–Operators in der vorliegenden Situation. Die Behauptung des Satzes ergibt sich somit aus Satz 1.3. $\square$

Die nächste Folgerung ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 4.5.

Folgerung 4.9. *Sei (M^{2m}, g, J) eine geschlossene Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung, auf der eine komplexe r–Kontaktstruktur existiert derart, daß $s = \frac{m-r}{r+1}$ eine ungerade Zahl ist. Dann ist M eine Spin–Mannigfaltigkeit, und es existiert ein Kählerscher Killing–Spinor auf M.*

Im Spezialfall $r = 1$, d.h. für komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten im üblichen Sinn, ergibt sich hieraus der schon im vorigen Abschnitt formulierte Satz 4.2. Dieser sei hier noch einmal als Folgerung angegeben.

Folgerung 4.10. *Sei (M, g, J) eine geschlossene Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k + 1$ (k ungerade) mit positiver Skalarkrümmung. Besitzt M eine komplexe Kontaktstruktur, so ist M eine Spin–Mannigfaltigkeit, und es existiert auf M ein Kählerscher Killing–Spinor.*

Im Fall $k \equiv 0(2)$ sei an den Satz 3.6 erinnert, der besagt, daß komplexe Kontaktmannigfaltigkeiten der komplexen Dimension $2k + 1$ mit $k \equiv 0(2)$, die eine Spin–Struktur besitzen, biholomorph äquivalent sind zum komplex projektiven Raum $\mathbb{C}P^{2k+1}$. Damit existieren auch in diesem Fall Kählersche Killing–Spinoren auf M.

4.3. Konstruktion einer Kontaktstruktur. Im vorigen Abschnitt ist gezeigt worden, wie man unter bestimmten Voraussetzungen aus einer r–Kontaktstruktur einen Kählerschen Killing–Spinor konstruieren kann. Umgekehrt läßt sich aus der Existenz eines Kählerschen Killing–Spinors nur die Existenz einer k–Kontaktstruktur ableiten, wobei $m = 2k + 1$ die komplexe Dimension der betrachteten Mannigfaltigkeit ist.

Sei (M, g, J) eine Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k + 1$, auf der ein Kählerscher Killing–Spinor $\Psi = \Psi_k + \Psi_{k+1}$ existiert. Es soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe von Ψ eine k–Kontaktstruktur auf M definieren kann.
Im weiteren sei k als ungerade vorausgesetzt. Damit ist die kanonische anti-unitäre Bündelabbildung $j : S \to S$ eine reelle Struktur, d.h. $j^2 = \mathrm{Id}$, und man kann den Realteil von Ψ betrachten. Falls dieser verschwindet, nimmt man den mit i multiplizierten Imaginärteil. Dadurch erhält man einen Kählerschen Killing–Spinor, der invariant unter der Abbildung j ist. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der gegebenen Kählersche Killing–Spinor Ψ ein *reeller* Spinor ist, d.h. der Gleichung $j\Psi = \Psi$ genügt. Mit solch einem reellen Spinor Ψ assoziiert man eine Familie $\mathcal{C}_\Psi = \{(U_i, \omega_i)\}$ von offenen Mengen U_i und Differentialformen $\omega_i \in \Gamma(\Lambda^{k,0}M\,|_{U_i})$. Zur Definition der Familie $\mathcal{C}_\Psi$ fixiert man eine holomorphe Trivialisierung des Linienbündels S_0, d.h. eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M mit nicht-verschwindenden holomorphen Schnitten $\Psi_{0,i} \in \Gamma(S_0\,|_{U_i})$ und definiert $\omega_i := |\Psi_{0,i}|^2\, \xi_k$, wobei ξ_k die k-Form auf U_i ist, die gegeben ist durch $\Psi\,|_{U_i} = \bar{\xi}_k \cdot \Psi_{0,i}$.

Satz 4.11. *Sei (M, g, J) eine Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$ (k ungerade), auf der ein Kählerscher Killing–Spinor existiert. Dann definiert die zu einem reellen Kählerschen Killing–Spinor Ψ assoziierte Familie $\mathcal{C}_{\Psi}$ eine komplexe k–Kontaktstruktur, d.h., sie genügt den folgenden Bedingungen:*

(i) *$\{U_i\}$ ist eine offene Überdeckung von M.*

(ii) *ω_i ist eine holomorphe k-Form auf U_i, d.h. $\bar{\partial}\omega_i = 0$.*

(iii) *$\omega_i \wedge \partial\omega_i \in \Gamma(\Lambda^{m,0}M\,|_{U_i})$ ist nirgends Null auf U_i.*

(iv) *Ist $U_i \cap U_j \neq 0$, so existiert eine holomorphe Funktion f auf $U_i \cap U_j$ mit $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ auf $U_i \cap U_j$.*

Beweis. Aus der Definition von $\mathcal{C}_{\Psi}$ und der Folgerung 1.5 ergeben sich unmittelbar die Bedingungen (i) und (ii).
Um (iv) nachzuprüfen, betrachtet man zwei offene Mengen U und U' aus $\mathcal{C}_{\Psi}$, für die $V := U \cap U' \neq \emptyset$ gilt. Die entsprechenden Schnitte Ψ_0 und Ψ'_0 sind holomorphe Schnitte des Linienbündels $S_0|_V$. Somit existiert eine holomorphe Funktion f auf V mit $\Psi'_0 = f\,\Psi_0$. Da $\Psi_k = \bar{\xi}'_k \cdot \Psi'_0 = \bar{\xi}_k \cdot \Psi_0$, folgt $\xi'_k = \bar{f}^{-1}\,\xi_k$ und schließlich

$$\omega' = |\Psi'_0|^2\,\xi'_k = |f\,|^2\,|\Psi_0|^2\,\bar{f}^{-1}\,\xi_k = f\,(\,|\Psi_0|^2\,\xi_k\,) = f\,\omega.$$

Damit ist auch die Bedingung (iv) erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß $\omega \wedge \partial\omega$ keine Nullstellen auf U hat. Indem man noch einmal die Folgerung 1.5 anwendet, erhält man

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \partial\omega &= |\Psi_0|^2\,\xi_k \wedge \partial(\,|\Psi_0|^2\,\xi_k\,) \\
&= |\Psi_0|^2\,\xi_k \wedge (\,\partial|\Psi_0|^2 \wedge \xi_k + |\Psi_0|^2\,\partial\,\xi_k\,) \\
&= |\Psi_0|^4\,\xi_k \wedge \partial\,\xi_k \\
&= |\Psi_0|^4\,\mu\,(m+1)\,\xi_k \wedge \xi_{k+1}.
\end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck für $\omega \wedge \partial\omega$ herzuleiten, benötigte man die Voraussetzung $k \equiv 1(2)$, da $\eta \wedge \eta = 0$ gilt, falls η eine Form von ungeradem Grad ist.
Es genügt also zu zeigen, daß $\xi_k \wedge \xi_{k+1}$ nirgends Null ist auf U. Hierfür ist es günstig, die lokale Form $\xi_m \in \Gamma(\Lambda^{m,o}\,M\,|_U)$ einzuführen, die definiert ist durch

$$j\,\Psi_0 = \bar{\xi}_m \cdot \Psi_0.$$

Diese Definition ist korrekt, da der Isomorphismus $S_r \cong K^{1/2} \otimes \Lambda^{0,r}M$ durch die Clifford-Multiplikation gegeben ist und $j(S_r) = S_{m-r}$. Für den Killing–Spinor Ψ gilt laut Voraussetzung $j\,\Psi = \Psi$, genauer

$$j\,\Psi_k = \Psi_{k+1} \qquad \text{and} \qquad j\,\Psi_{k+1} = \Psi_k. \tag{4.8}$$

Der Faktor 2^m erklärt sich durch die Definition der Clifford–Multiplikation mit Formen (siehe (1.4)). Insbesondere haben Ψ_{k+1} und Ψ_k dieselbe konstante Länge, und man kann o.B.d.A.

annehmen, daß
$$|\Psi_k|^2 \quad = \quad |\Psi_{k+1}|^2 \quad = \quad 1 \quad .$$
Als nächstes sieht man, daß ξ_m nirgends Null ist auf U. Genauer gilt $|\xi_m|^2 = 2^{-m}$, da
$$|\Psi_0|^2 \quad = \quad |j\,\Psi_0|^2 \quad = \quad |\bar{\xi}_m\,\Psi_0|^2 \quad = \quad 2^m\,|\xi_m|^2\,|\Psi_0|^2.$$

Aus (4.8) ergibt sich
$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{k+1}\cdot\Psi_0 \quad &= \quad \Psi_{k+1} \quad = \quad j\,\Psi_k \quad = \quad j(\bar{\xi}_k\cdot\Psi_0) \quad = \quad \xi_k\cdot j\,\Psi_0 \\ &= \quad \xi_k\cdot\bar{\xi}_m\cdot\Psi_0 \\ &= \quad (-1)^{k(k+1)/2}\,2^k\,(\xi_k\,\lrcorner\,\bar{\xi}_m)\cdot\Psi_0, \end{aligned}$$
und damit folgt die Gleichung
$$\bar{\xi}_k\,\lrcorner\,\xi_m \quad = \quad 2^{-k}\,(-1)^{k(k+1)/2}\,\xi_{k+1}.$$

Da $\xi_k \wedge \xi_{k+1} \in \Gamma(\Lambda^{m,o}M\big|_U)$ und $\xi_m \neq 0$, existiert eine Funktion λ auf U mit
$$\xi_k \wedge \xi_{k+1} \quad = \quad \lambda\,\xi_m.$$
Um also zu zeigen, daß $\xi_k \wedge \xi_{k+1}$ nirgends Null ist auf U, genügt es nachzuweisen, daß $\lambda \neq 0$ ist. Das ergibt sich aus der folgenden Rechnung, wenn man noch $\xi_m \neq 0$ berücksichtigt.
$$\begin{aligned} \lambda\,|\xi_m|^2 &= \; < \xi_k \wedge \xi_{k+1}, \xi_m > \\ &= \; < \xi_{k+1}, \bar{\xi}_k\,\lrcorner\,\xi_m > \\ &= \; 2^{-k}\,(-1)^{k(k+1)/2}\,|\xi_{k+1}|^2 \\ &= \; 2^{-m}\,(-1)^{k(k+1)/2}\,|\Psi_0|^{-2}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da $1 = |\Psi_{k+1}|^2 = |\bar{\xi}_{k+1}\cdot\Psi_0|^2 = 2^{k+1}|\xi_{k+1}|^2\,|\Psi_0|^2$. Damit sind alle vier Bedingungen nachgeprüft und die Familie $\mathcal{C}_\Psi$ definiert wirklich eine k–Kontaktstruktur. □

5. Komplexe fast–Kontaktmannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel sollen die komplexen Kontaktmannigfaltigkeiten noch einmal unter einem anderen Aspekt betrachtet werden, der eine Analogie zu den Sasaki–Strukturen im reellen Fall liefert, und in dieser Situation einen zweiten Beweis für die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren gestattet. Im ersten Abschnitt werden die dafür notwendigen Definitionen und Eigenschaften bereitgestellt.

5.1. Definition und Eigenschaften. Im Zusammenhang mit der Untersuchung von komplexen Kontaktstrukturen, die durch Faserungen von Mannigfaltigkeiten mit einer Sasaki–3–Struktur induziert sind, führten S. Ishihara und M. Konishi den Begriff der komplexen fast–Kontaktmannigfaltigkeit ein (siehe [IK79] und [IK80]). Solche Strukturen liefern wieder eine komplexe Kontaktstruktur, falls sie einer gewissen Bedingung (der Normalität) genügen.

Sei (M, g, J) eine hermitesche Mannigfaltigkeit, d.h. eine komplexe Mannigfaltigkeit mit hermitescher Metrik g. Weiter sei $\mathcal{C}$ eine offenen Überdeckung von M. Man nennt $(M, \mathcal{C})$ eine *komplexe fast–Kontaktmannigfaltigkeit* , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Auf jeder offenen Menge $O \in \mathcal{C}$ existiert eine 1–Form u und ein (1,1)–Tensor G derart, daß

$$\begin{aligned} G^2 &= -\mathrm{Id} + u \otimes U + v \otimes V \\ G \circ J &= -J \circ G \qquad \text{und} \quad g(GX, Y) = -g(X, GY) \\ G(U) &= 0 \qquad \text{und} \quad g(U, U) = 1, \end{aligned}$$

wobei $v := u \circ J$. U bzw. V sind die zu u bzw. v assoziierten Vektorfelder, d.h. z.B. $u(X) = g(U, X)$.

(2) Falls $O \cap O' \neq \emptyset$ für zwei Mengen O und O' aus $\mathcal{C}$ gilt, so existieren Funktionen a, b auf $O \cap O'$ mit

$$\begin{aligned} u' &= au - bv, \qquad & G' &= aG - bH \\ v' &= bu + av, \qquad & H' &= bG + aH \\ a^2 + b^2 &= 1, \end{aligned}$$

wobei H durch $H = G \circ J$ definiert ist.

Das Tripel $(\mathcal{C}, u, G)$ mit den angegebenen Eigenschaften wird als komplexe fast–Kontaktstruktur bezeichnet. Aus dieser Definition ergeben sich ein Reihe elementarer Konsequenzen (siehe [IK80]). In bezug auf die Reduktion der Strukturgruppe hat man die folgende Analogie zum Fall der reellen fast–Kontaktmannigfaltigkeiten (siehe [Shi78]).

Fakt 5.1. *Die Strukturgruppe einer hermiteschen Mannigfaltigkeit ungerader komplexer Dimension $2k+1$ läßt sich genau dann auf $U(1) \times (Sp(k) \otimes U(1))$ reduzieren, wenn auf M eine komplexe fast–Kontaktstruktur existiert.*

Sei P die Projektion auf das von den Vektoren U und V (global) definierte Unterbündel, d.h. $P = u \otimes U + v \otimes V$ und ∇ der Levi–Civita–Zusammenhang von (M, g). Dann ist auf jeder Menge $O \in \mathcal{C}$ folgendermaßen eine 1–Form σ definiert:

$$P(\nabla_X U) = 2\,\sigma(X)\,V \quad \text{und} \quad P(\nabla_X V) = -2\,\sigma(X)\,U.$$

Für die spätere Anwendung seien die folgenden Bezeichnungen vereinbart:

$$\xi := U + iV, \quad \text{und} \quad \phi := G + iH.$$

Mit (ξ, ϕ) wird dann die entsprechende komplexe fast–Kontaktstruktur bezeichnet. Unmittelbar aus der Definition ergibt sich das nächste Lemma.

Lemma 5.1. *Sei (M, g) eine hermitesche Mannigfaltigkeit mit einer komplexen fast–Kontaktstruktur (ξ, ϕ). Dann gilt*

(1) $\xi \in TM^{1,0}$ *und* $g(\xi, \bar{\xi}) = 2$
(2) *Für beliebige Vektorfelder X in $TM^{1,0}$ gilt $\phi(X) = 0$ und $\phi(\bar{X}) \in TM^{10}$.*
(3) *Für beliebige Vektorfelder X, Y in $TM^{1,0}$ gilt $g(\phi(\bar{X}), \bar{Y}) = -g(\bar{X}, \phi(\bar{Y}))$.*

Den Begriff der normalen komplexen fast–Kontaktstruktur definiert man durch das Verschwinden gewisser Strukturtensoren (siehe [IK80]). Hierfür hat man eine äquivalente Formulierung.

Fakt 5.2. *Eine komplexe fast–Kontaktstruktur (ξ, ϕ) ist genau dann normal, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:*

$$(\nabla_X \phi)(Y) = 2g(\xi, Y)\,p(X) - 2g(p(X), Y)\,\xi - 2i\sigma(X)\,\phi(Y) \tag{5.1}$$

$$\phi^* = d\xi^* + i\sigma \wedge \xi^*. \tag{5.2}$$

Dabei ist $p(X) := \frac{1}{2}(X - iJX)$, $\xi^*(X) := g(\xi, X)$ *und* $\phi^*(X, Y) := g(\phi(X), Y)$.

Aus der Definition der Normalität erhält man noch eine weitere Gleichung, die im folgenden mehrfach benutzt wird.

Fakt 5.3. *Sei (ξ, ϕ) eine normale komplexe fast–Kontaktstruktur. Dann gilt für beliebige Vektorfelder X*

$$\nabla_X \xi = \phi(X) - 2i\sigma(X)\,\xi. \tag{5.3}$$

Die wichtigsten Eigenschaften, die aus der Normalität folgen, sind im nächsten Fakt zusammengefaßt (siehe [IK80]).

Fakt 5.4. *Sei (M, g, J) eine hermitesche Mannigfaltigkeit, die eine normale komplexe fast–Kontaktstruktur zuläßt. Dann ist (M, g, J) eine Kähler–Einstein Mannigfaltigkeit und besitzt eine komplexe Kontaktstruktur. Ist (M, g) vollständig, so ist M kompakt.*

Beispiel. *Die kanonische komplexe Kontaktstruktur auf dem Twistorraum einer quaternionisch–Kähler–Mannigfaltigkeit ist normal (siehe* [IK79]*).*

Unmittelbar aus den Gleichungen (5.1) und (5.3) kann man noch einige zusätzliche Krümmungseigenschaften von normalen komplexen fast–Kontaktmannigfaltigkeiten herleiten, die vergleichbar sind mit den entsprechenden Beziehungen auf Sasaki–Mannigfaltigkeiten, und auf die später zurückgegriffen wird.

Lemma 5.2. *Sei (ξ,ϕ) eine normale komplexe fast–Kontaktstruktur. Dann gilt für beliebige Vektorfelder X, Y aus $T^{1,0}M$*

$$\begin{aligned} R(\bar{X},Y)\,\xi &= -2\,g(\xi,\bar{X})\,Y - 2g(\bar{X},Y)\,\xi \\ R(\bar{X},Y)\,\bar{\xi} &= 2g(\bar{\xi},Y)\,\bar{X} + 2g(\bar{X},Y)\,\bar{\xi}, \end{aligned}$$

wobei R den Krümmungstensor der Mannigfaltigkeit M bezeichnet.

Folgerung 5.3. *Für die Skalarkrümmung R einer normalen komplexen fast–Kontaktmannigfaltigkeit der komplexen Dimension $2k+1$ gilt*

$$R = 8(2k+1)(k+1).$$

Lemma 5.4. *Sei (ξ,ϕ) eine normale komplexe fast–Kontaktstruktur. Dann gilt für beliebige Vektorfelder X, Y, Z aus $T^{1,0}M$*

$$R(\bar{X},Y)\,\phi(\bar{Z}) = 2g(\phi(\bar{X}),\bar{Z})Y - 2g(Y,\bar{Z})\phi(\bar{X}) - 4g(\bar{X},Y)\phi(\bar{Z}) + \phi(R(\bar{X},Y)\bar{Z}).$$

5.2. Killing–Spinoren und normale Kontaktstrukturen. In der Arbeit [FK90] zeigten Th.Friedrich und I. Kath die Existenz von reellen Killing–Spinoren auf einfach zusammenhängenden Einstein–Sasaki–Mannigfaltigkeiten mit Spin–Struktur. Ziel dieses Abschnittes ist es, in Analogie zum Riemannschen Fall, die Existenz Kählerscher Killing–Spinoren auf normalen komplexen fast–Kontaktmannigfaltigkeiten zu zeigen, d.h., es soll das folgende Theorem bewiesen werden:

Theorem 5.5. *Sei (M^{2m}, g, J) eine einfach zusammenhängende hermitesche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k+1$, wobei k ungerade ist. Besitzt M eine normale komplexe fast–Kontaktstruktur (ξ,ϕ), so existiert auf M ein Kählerscher Killing–Spinor.*

Zur Erklärung sei noch einmal daran erinnert, daß eine hermitesche Mannigfaltigkeit mit normaler komplexer fast–Kontaktstruktur automatisch eine Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit mit komplexer Kontaktstruktur ist, und aus der Vorausetzung $k \equiv 1(2)$ folgt dann wieder die Existenz einer Spin–Struktur.

Die Aussage des Theorems folgt natürlich auch aus den Ergebnissen der vorangehenden Abschnitte, es ist aber interessant, die Analogie zum reellen Fall zu bemerken. Zudem liefert der hier angegebene Beweis einen ganz anderen Zugang zur Frage der Existenz Kählerscher Killing–Spinoren.

Der Beweis des Theorems verläuft ähnlich wie der Beweis in [FK90], d.h., man definiert ein Unterbündel E im Spinorbündel zusammen mit einer modifizierten kovarianten Ableitung $\tilde{\nabla}$ derart, daß parallele Schnitte, falls welche existieren, gerade Kählersche Killing–Spinoren sind. Weiter zeigt man, daß die Krümmung des modifizierten Zusammenhangs verschwindet und

E somit ein flaches Vektorbündel über einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist. Daher existieren $\tilde{\nabla}$–parallele Schnitte in E, und deren Anzahl ist genau der Rang von E.

Sei (M, g, J) jetzt eine einfach zusammenhängende hermitesche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $m = 2k + 1$. Auf M existiere eine normale komplexe fast–Kontaktstruktur (ξ, ϕ). Das Unterbündel $E \subset S_k \oplus S_{k+1}$ wird definiert als die Menge aller $u = u_- + u_+$ mit $u_- \in S_k$ und $u_+ \in S_{k+1}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{llcl}
\text{(i)} & -\xi \cdot \bar{Z} \cdot u_+ & = & \phi(\bar{Z}) \cdot u_-, \\
\text{(ii)} & \bar{\xi} \cdot u_+ & = & 0, \\[1ex]
\text{(iii)} & -\bar{\xi} \cdot Z \cdot u_- & = & \bar{\phi}(Z) \cdot u_+, \\
\text{(iv)} & \xi \cdot u_- & = & 0,
\end{array}$$

wobei Z ein beliebiger Vektor aus $T^{1,0}M$ ist.

Die Gleichungen (iii) und (iv) sind äquvivalent zu den ersten beiden, wenn man solche Vektoren u betrachtet, für die $j(u_+) = u_-$ gilt. Die beiden Paare von Gleichungen gehen dann jeweils durch Anwendung von j auseinander hervor.

Die modifizierte kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}$ wird definiert durch

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\nabla}_X u & := & (\tilde{\nabla}_X u)^- + (\tilde{\nabla}_X u)^+, \\[2ex]
\text{mit} \quad (\tilde{\nabla}_X u)^- & = & \nabla_X u_- - \bar{p}(X) \cdot u_+ \\
(\tilde{\nabla}_X u)^+ & = & \nabla_X u_+ - p(X) \cdot u_-.
\end{array}$$

Dabei ist $u = u_- + u_+$ und $p(X) := 1/2(X - iJX)$, d.h., p ist die Projektion auf $T^{1,0}M$ und $\bar{p}$ entsprechend die Projektion auf $T^{0,1}M$.

Lemma 5.6. *Die kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}$ ist ein Zusammenhang im Unterbündel E.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß für $X \in TM$ aus $u \in \Gamma(E)$ auch $\tilde{\nabla}_X u \in \Gamma(E)$ folgt. Man hat also die folgenden Gleichungen zu beweisen:

$$\begin{array}{llcl}
(a) & -\xi \cdot \bar{Z} \cdot (\nabla_X u_+ - p(X) \cdot u_-) & = & \phi(\bar{Z}) \cdot (\nabla_X u_- - \bar{p}(X) \cdot u_+), \\
(b) & \bar{\xi} \cdot (\nabla_X u_+ - p(X) \cdot u_-) & = & 0
\end{array}$$

sowie die (iii) und (iv) entsprechenden analogen Gleichungen, die im weiteren nicht mehr betrachtet werden, da sie immer zu ähnlichen Rechnungen führen.

Aus den definierenden Gleichungen (i) und (ii) erhält man durch kovariantes Ableiten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{rcl}
-\xi \cdot \bar{Z} \cdot \nabla_X u_+ - \phi(\bar{Z}) \cdot \nabla_X u_- & = & \nabla_X \xi \cdot \bar{Z} \cdot u_+ + (\nabla_X \phi)(\bar{Z}) \cdot u_- \\[1ex]
\bar{\xi} \cdot \nabla_X u_+ & = & -\nabla_X \bar{\xi} \cdot u_+.
\end{array} \tag{5.4}$$

Außerdem folgt aus Gleichung (i) $\bar{\xi} \cdot \xi \cdot \bar{Z} \cdot u_+ = -\bar{\xi} \cdot \phi(\bar{Z}) \cdot u_-$, woraus man aufgrund von $g(\xi, \bar{\xi}) = 2$ und $\bar{\xi} \cdot u_+ = 0$ noch die folgende nützliche Beziehung erhält:

$$\bar{Z} \cdot u_+ \quad = \quad -\tfrac{1}{4}\,\phi(\bar{Z}) \cdot \bar{\xi} \cdot u_- . \tag{5.5}$$

Die Bedingung (b) sei zunächst für Vektoren X mit $g(p(X), \bar{\xi}) = 0$ bewiesen. Unter dieser Voraussetzung findet man

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \cdot \nabla_X u_+ &= -\nabla_X \bar{\xi} \cdot u_+ \\ &= -(\bar{\phi}(X) \;+\; 2i\sigma(X)\bar{\xi}) \cdot u_+ && \text{(nach Fakt 5.3)} \\ &= -\bar{\phi}(X) \cdot u_+ && (\text{da} \quad \bar{\xi} \cdot u_+ = 0) \\ &= -\bar{\phi}(p(X)) \cdot u_+ \\ &= \quad \bar{\xi} \cdot p(X) \cdot u_- . \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß (b) auch richtig ist für $X = U$ und $X = V$, wobei $\xi = U + iV$. Sei z.B. $X = U$, dann ist $p(X) = \xi$ und es gilt

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \cdot \nabla_U u_+ &= -\nabla_U \bar{\xi} \cdot u_+ \\ &= -2i\sigma(U)\bar{\xi} \cdot u_+ && \text{(nach Fakt 5.3)} \\ &= \quad 0. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite der Gleichung erhält man $\bar{\xi} \cdot p(U) \cdot u_- \; = \; \bar{\xi} \cdot \xi \cdot u_- \; = \; 0$. Damit ist die Bedingung (b) vollständig bewiesen. Es soll jetzt die Bedingung (a) überprüft werden. Nach Umstellung von (a) sieht man, daß man die folgende Gleichung zu beweisen hat:

$$-\,\xi \cdot \bar{Z} \cdot \nabla_X u_+ \;-\; \phi(\bar{Z}) \cdot \nabla_X u_- \;=\; -\xi \cdot \bar{Z} \cdot p(X) \cdot u_- \;-\; \phi(\bar{Z}) \cdot \bar{p}(X) \cdot u_+ . \tag{5.6}$$

Formt man zunächst die linke Seite um, so erhält man aus (5.4) und den Fakten 5.3 bzw.5.1

$$\begin{aligned} -\xi \cdot \bar{Z} \cdot \nabla_X u_+ \;-\; \phi(\bar{Z}) \cdot \nabla_X u_- &= \nabla_X \xi \cdot \bar{Z} \cdot u_+ \;+\; (\nabla_X \phi)(\bar{Z}) \cdot u_- \\ &= (\phi(X) - 2i\sigma(X)\xi) \cdot \bar{Z} \cdot u_+ \;-\; 2i\sigma(X)\phi(\bar{Z}) \cdot u_- \\ &= \phi(X)\bar{Z} \cdot u_+ . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Definition des Unterbündels. Die Umformung der rechten Seite ergibt

$$-\xi \cdot \bar{Z} \cdot p(X) \cdot u_- \;-\; \phi(\bar{Z}) \cdot \bar{p}(X) \cdot u_+ = \;-\; \phi(\bar{Z}) \cdot \bar{p}(X) \cdot u_+ .$$

Bedingung (a) ist also genau dann erfüllt, wenn

$$(\phi(X)\bar{Z} \;+\; \phi(\bar{Z}) \cdot \bar{p}(X)) \cdot u_+ \quad = \quad 0$$

für beliebige Vektoren X und Z gilt, mit $g(Z, \bar{\xi}) = 0$. Ersetzt man jetzt $\bar{Z}$ und $\bar{p}(X)$ mit Hilfe der Formel (5.5), so erhält man die äquivalente Bedingung

$$(\phi(X) \cdot \phi(\bar{Z}) \cdot \bar{\xi} \;+\; \phi(\bar{Z}) \cdot \phi(\bar{p}(X)) \cdot \bar{\xi}) \cdot u_- \quad = \quad 0.$$

Diese Gleichung ist immer erfüllt, da die Vektoren $\phi(\bar{Z})$ und $\phi(X) = \phi(\bar{p}(X))$ beide in $T^{1,0}M$ liegen und folglich gilt $\phi(X) \cdot \phi(\bar{Z}) = -\phi(\bar{Z}) \cdot \phi(X)$. □

Somit ist also gezeigt, daß $\tilde{\nabla}$ einen Zusammenhang im Unterbündel $E \subset S_k \oplus S_{k+1}$ definiert.

Lemma 5.7. *Für den Krümmungstensor $\tilde{R}$ des modifizierten Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$ gilt*

$$\tilde{R}(\bar{X}, Y)u \quad = \quad R^S(\bar{X}, Y)u \; + \; \bar{X} \cdot Y \cdot u_- \; - \; Y \cdot \bar{X} \cdot u_+.$$

Dabei bezeichnet R^S den Krümmungstensor des Spinorbündels, X, Y sind beliebige Vektorfelder in $T^{1,0}M$ und, $u = u_- + u_-$ ist ein beliebiger Spinor in $S_k \oplus S_{k+1}$.

Beweis. Zum Beweis geht man von der Definition des Krümmungstensors $\tilde{R}$ aus, d.h. von

$$\tilde{R}(\bar{X}, Y)u \quad = \quad \tilde{\nabla}_{\bar{X}} \tilde{\nabla}_Y u \; - \; \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_{\bar{X}} u \; - \; \tilde{\nabla}_{[\bar{X}, Y]} u.$$

Setzt man hier die Definition von $\tilde{\nabla}$ ein, so erhält man nach einer kleinen Rechnung die Behauptung. □

Nun soll gezeigt werden, daß $\tilde{R}$ auf dem Unterbündel E verschwindet. Dazu sind noch einige Vorbemerkungen nötig.

Lemma 5.8. *Seien X, Y beliebige Vektorfelder aus $T^{1,0}M$ mit $g(X, \bar{\xi}) = 0 = g(Y, \bar{\xi})$ und $u = u_- + u_+$ ein Spinor aus dem Unterbündel E. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \phi(\bar{X}) \cdot \bar{Y} \cdot u_- \quad &= \quad -\,\phi(\bar{Y}) \cdot \bar{X} \cdot u_- \\ X \cdot \bar{\phi}(Y) \cdot u_- \quad &= \quad -\,\bar{\phi}(Y) \cdot X \cdot u_- \\ X \cdot \bar{Y} \cdot u_- \quad &= \quad \tfrac{1}{4}\, \phi(\bar{Y}) \cdot \bar{\phi}(X) \cdot u_-. \end{aligned}$$

Beweis. Als Beispiel soll die erste Gleichung bewiesen werden. Alle anderen Beweise verlaufen dann ähnlich. Aus den Gleichungen (i) – (iv), die das Unterbündel E definieren und der Formel (5.5) ergeben sich die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} \phi(\bar{X}) \cdot \bar{Y} \cdot u_- \quad &= \quad -\bar{Y} \cdot \phi(\bar{X}) \cdot u_- \quad - \quad 2\, g(\phi(\bar{X}), \bar{Y})\, u_- \\ &= \quad \bar{Y} \cdot \xi \cdot \bar{X} \cdot u_+ \quad - \quad 2\, g(\phi(\bar{X}), \bar{Y})\, u_- \\ &= \quad \xi \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot u_+ \quad - \quad 2\, g(\phi(\bar{X}), \bar{Y})\, u_- \\ &= \quad -\tfrac{1}{4}\, \xi \cdot \bar{X} \cdot \phi(\bar{Y}) \cdot \bar{\xi} \cdot u_- \quad - \quad 2\, g(\phi(\bar{X}), \bar{Y})\, u_- \\ &= \quad \bar{X} \cdot \phi(\bar{Y}) \cdot u_- \quad - \quad 2\, g(\phi(\bar{X}), \bar{Y})\, u_- \\ &= \quad -\phi(\bar{Y}) \cdot \bar{X} \cdot u_- \quad - \quad 2\, g(\bar{X}, \phi(\bar{Y}))\, u_- \quad - \quad 2\, g(\phi(\bar{X}), \bar{Y})\, u_- \\ &= \quad -\,\phi(\bar{Y}) \cdot \bar{X} \cdot u_-. \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung wurde noch einmal das Lemma 5.1 benutzt. □

Lemma 5.9. *Sei (M, g, J) eine Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension m. Dann gilt für den Krümmungstensor des Spinorbündels*

$$R^S(\bar{X}, Y)\, u \quad = \quad 2 \sum_{i,j=1}^{m} R(\bar{X}, Y, \bar{\mathrm{f}}_i, \mathrm{f}_j)\, \mathrm{f}_i \cdot \bar{\mathrm{f}}_j \cdot u \;+\; \tfrac{1}{2}\, \mathrm{Ric}(\bar{X}, Y)\, u.$$

Dabei ist $\{\mathrm{f}_i\}$ eine lokale Basis in $T^{1,0}M$ mit $g(\mathrm{f}_i, \bar{\mathrm{f}}_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$, und X, Y sind beliebige Vektorfelder in $T^{1,0}M$.

Beweis. Das Lemma ergibt sich aus der folgenden Formel, die eine Beziehung zwischen dem Krümmungstensor des Spinorbündels und dem Krümmungstensor der Riemannschen Metrik darstellt (siehe [BFGK90]):

$$R^S(X, Y)\, u \quad = \quad \tfrac{1}{4} \sum_{i,j} R(X, Y, e_i, e_j)\, e_i \cdot e_j \cdot u.$$

Dabei ist $\{e_i\}_{i=1,\dots,2m}$ eine lokale orthonormale Basis. Geht man jetzt in dieser Formel zur komplexen Basis $\{\mathrm{f}_i\}_{i=1,\dots,m}$ über, so folgt zunächst

$$R^S(X, Y)\, u \quad = \quad \sum_{i,j} \left(R(X, Y, \mathrm{f}_i, \bar{\mathrm{f}}_j)\, \bar{\mathrm{f}}_i \cdot \mathrm{f}_j \;+\; R(X, Y, \bar{\mathrm{f}}_i, \mathrm{f}_j)\, \mathrm{f}_i \cdot \bar{\mathrm{f}}_j \right) \cdot u. \tag{5.7}$$

Die Aussage des Lemmas erhält man dann aus der Gleichung $\frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}(\bar{X}, Y) = \sum_{i=1}^{m} R(\bar{X}, Y, \bar{\mathrm{f}}_i, \mathrm{f}_j)$, die auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten erfüllt ist. □

Es ist nun günstig, eine der speziellen Situation angepaßte lokale Basis zu wählen. Dazu seien $\{\mathrm{f}_i\}, i = 1, \dots k$ lokale Vektorfelder in $T^{1,0}M$ mit $g(\mathrm{f}_i, \mathrm{f}_j) = \frac{1}{2}\delta_{i,j}$. Man setzt dann

$$\mathrm{f}_{k+i} := \tfrac{1}{2}\,\phi(\bar{\mathrm{f}}_i) \quad , i = 1, \dots, k \quad \text{und} \quad \mathrm{f}_{2k+1} := \tfrac{1}{2}\,\xi. \tag{5.8}$$

Als nächstes soll gezeigt werden, daß $R^S(\bar{X}, Y)u_- + \bar{X} \cdot Y \cdot u_- = 0$ für beliebige Vektorfelder X, Y aus $TM^{1,0}$ gilt. Dazu benutzt man das Lemma 5.9. Für den Ausdruck $R^S(\bar{X}, Y)u_-$ gilt danach

$$R^S(\bar{X}, Y)u_- \quad = \quad 2 \sum_{i,j=1}^{2k+1} R(\bar{X}, Y, \bar{\mathrm{f}}_i, \mathrm{f}_j)\, \mathrm{f}_i \cdot \bar{\mathrm{f}}_j \cdot u_- \;+\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Ric}(\bar{X}, Y)\, u_-. \tag{5.9}$$

Da M eine Einstein–Mannigfaltigkeit ist, erhält man aus der Folgerung 5.3 die Formel $\frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}(\bar{X}, Y) = 2(k+1)\, g(\bar{X}, Y)$. Somit ist also nur noch der erste Summand zu betrachten. Hier sei zur Abkürzung die Bezeichnung $R(.,\bar{\mathrm{f}}_i, \mathrm{f}_j) := R(\bar{X}, Y, \bar{\mathrm{f}}_i, \mathrm{f}_j)$ eingeführt. Benutzt man jetzt die in (5.8) definierte Basis $\{\mathrm{f}_j\}$, so findet man für diesen Summanden

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2k+1} R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \;&=\; \sum_{i,j=1}^{k}\big(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \;+\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+j},\mathrm{f}_{k+i})\,\mathrm{f}_{k+j}\cdot\bar{\mathrm{f}}_{k+i}\big) \;+\\ &+\; \sum_{i,j=1}^{k}\big(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_{k+j})\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_{k+j} \;+\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+i},\mathrm{f}_j)\,\mathrm{f}_{k+i}\cdot\bar{\mathrm{f}}_j\big) \;+\\ &+\; \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{2k+1}\big(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\xi)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\xi} \;+\; R(.,\bar{\xi},\mathrm{f}_i)\xi\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\big)\,.\end{aligned}$$

Setzt man in Lemma 5.8 die spezielle Basis $\{\mathrm{f}_i\}$ ein, so ergeben sich die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\mathrm{f}_{k+j}\cdot\bar{\mathrm{f}}_{k+i}\cdot u_- &= \mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j\cdot u_-\\ \mathrm{f}_j\cdot\bar{\mathrm{f}}_{k+i}\cdot u_- &= -\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_{k+j}\cdot u_-\\ \mathrm{f}_{k+j}\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\cdot u_- &= -\,\mathrm{f}_{k+i}\cdot\bar{\mathrm{f}}_j\cdot u_-\,.\end{aligned}$$

Mit diesen Formeln kann man Summanden zusammenfassen. Man erhält

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2k+1} R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \;&=\; \sum_{i,j=1}^{k}\big(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j) \;+\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+j},\mathrm{f}_{k+i})\big)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \;+\\ &+\; \sum_{i<j}\big(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_{k+j}) \;-\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_j,\mathrm{f}_{k+i})\big)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_{k+j} \;+\\ &+\; \sum_{i<j}\big(R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+i},\mathrm{f}_j) \;-\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+j},\mathrm{f}_i)\big)\,\mathrm{f}_{k+i}\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \;+\\ &+\; \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{2k+1}\big(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\xi)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\xi} \;+\; R(.,\bar{\xi},\mathrm{f}_i)\xi\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\big)\,.\end{aligned}$$

Für die Vektorfelder X, Y sei jetzt $g(X,\bar{\xi}) = 0 = g(Y,\bar{\xi})$ vorausgesetzt, bezüglich der Basis $\{\mathrm{f}_i\}$ schreiben sie sich dann als $X = \sum_{i=1}^{k}(a_i\,\mathrm{f}_i + b_i\,\mathrm{f}_{k+i})$ und $Y = \sum_{i=1}^{k}(A_i\,\mathrm{f}_i + B_i\,\mathrm{f}_{k+i})$. Mit diesen Bezeichnungen folgt jetzt aus Lemma 5.4

$$\begin{aligned}R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j) \;+\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+j},\mathrm{f}_{k+i}) &= \tfrac{1}{2}\,B_j\,\bar{b}_i \;+\; \tfrac{1}{2}\,A_i\,\bar{a}_j \;+\; 2\,g(\bar{X},Y)\,\delta_{ij}\\ R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_{k+j}) \;-\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_j,\mathrm{f}_{k+i}) &= \tfrac{1}{2}\,A_i\,\bar{b}_j \;-\; \tfrac{1}{2}\,A_j\,\bar{b}_i\\ R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+i},\mathrm{f}_j) \;-\; R(.,\bar{\mathrm{f}}_{k+j},\mathrm{f}_i) &= \tfrac{1}{2}\,B_i\,\bar{a}_j \;-\; \tfrac{1}{2}\,B_j\,\bar{a}_i.\end{aligned}$$

Aufgrund dieser Gleichungen heben sich verschiedenen Krümmungsterme gegenseitig weg, und es verbleibt insgesamt der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned}
2\sum_{i,j=1}^{2k+1} R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \quad &= \quad \sum_{i,j=1}^{k}\left(B_j\,\bar{b}_i \;+\; A_i\,\bar{a}_j \;+\; 4\,g(\bar{X},Y)\,\delta_{ij}\right)\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \;+\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{k}\left(A_i\,\bar{b}_j \;-\; A_j\,\bar{b}_i\right)\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_{k+j} \;+\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{k}\left(B_i\,\bar{a}_j \;-\; B_j\,\bar{a}_i\right)\mathrm{f}_{k+i}\cdot\bar{\mathrm{f}}_j \;+\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k+1}\left(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\xi)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\xi} \;+\; R(.,\bar{\xi},\mathrm{f}_i)\xi\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\right).
\end{aligned}$$

Verwendet man jetzt noch einmal Lemma 5.8, um von den Koeffizienten $a_i, A_i, \ldots$ wieder zu den entsprechenden Vektoren zu gelangen, so erhält man

$$\begin{aligned}
2\sum_{i,j=1}^{2k+1} R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j\cdot u_- \quad &= \quad Y\cdot\bar{X}\cdot u_- \;+\; 4\,g(\bar{X},Y)\sum_{i=1}^{k}\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\cdot u_- \;+\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k+1}\left(R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\xi)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\xi} \;+\; R(.,\bar{\xi},\mathrm{f}_i)\xi\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\right)\cdot u_-.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 5.2 folgt $R(.,\bar{\mathrm{f}}_i,\xi) = 2g(\bar{X},Y)\,g(\xi,\bar{\mathrm{f}}_i)$ bzw. $R(.,\bar{\xi},\mathrm{f}_i) = 2g(\bar{X},Y)\,g(\bar{\xi},\mathrm{f}_i)$. Damit reduziert sich der letzte Summand auf $-2g(\bar{X},Y)\,u_-$. Schließlich benutzt man noch die Voraussetzung, daß u_- in S_k liegt und die folgende kleine Rechnung:

$$\begin{aligned}
4\sum_{i=1}^{k}\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\cdot u_- \quad &= \quad 2\sum_{i=1}^{2k+1}\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\cdot u_- \;-\; \tfrac{1}{2}\,\xi\cdot\bar{\xi}\cdot u_-\\
&= \quad \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k+1}(-2 \;-\; 2i\,\Omega)\cdot u_- \;+\; 2\,u_-\\
&= \quad (-2(2k+1) \;+\; 2 \;+\; 2)\,u_- \quad = \quad (-2k \;+\; 2)\,u_-.
\end{aligned}$$

Damit hat man alle Teile zusammen, um die Behauptung $R^S(\bar{X},Y)u_- + \bar{X}\cdot Y\cdot u_- = 0$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
R^S(\bar{X},Y)u_- \quad &= \quad 2\sum_{i,j=1}^{2k+1} R(\bar{X},Y,\bar{\mathrm{f}}_i,\mathrm{f}_j)\,\mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_j\cdot u_- \;+\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Ric}(\bar{X},Y)\,u_-\\
&= \quad Y\cdot\bar{X}\cdot u_- \;+\; (-2k \;+\; 2)g(\bar{X},Y)\,u_- \;-\; 2g(\bar{X},Y)\,u_- \;+\; (2k \;+\; 2)g(\bar{X},Y)\,u_-\\
&= \quad Y\cdot\bar{X}\cdot u_- \;+\; 2\,g(\bar{X},Y)\,u_-\\
&= \quad -\,\bar{X}\cdot Y\cdot u_-.
\end{aligned}$$

Die entsprechende Aussage für u_+, d.h. $R(\bar{X},Y)u_+ - Y\cdot\bar{X}\cdot u_+ = 0$, beweist man völlig analog und ebenso die jeweiligen Aussagen für $R(X,\bar{Y})$ (andere Krümmungsterme braucht man nicht zu betrachten, da (M,g) eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist).

Der Fall $X=\xi$ oder $Y=\xi$ ist im Prinzip im vorgeführten Beweis enthalten. Um die Formeln etwas zu vereinfachen, wurde jedoch die Voraussetzung $g(X,\bar{\xi}) = 0 = g(Y,\bar{\xi})$ gemacht. In Lemma 5.7 war der Krümmungstensor des modifizierten Zusammenhangs berechnet worden, es gilt

$$\widetilde{R}(\bar{X},Y)u \;=\; \left(R^S(\bar{X},Y) + \bar{X}\cdot Y\cdot\right)u_- + \left(R(\bar{X},Y) - Y\cdot\bar{X}\cdot\right)u_+ .$$

Damit folgt aus dem eben Bewiesenen, daß $\widetilde{R}$ auf dem Unterbündel $E\subset S_k\oplus S_{k+1}$ verschwindet.

Man hat nun noch den Rang des Unterbündels E zu bestimmen. Dazu genügt es, die E definierenden Gleichungen in einem fixierten Punkt $x\in M$ zu betrachten. Sei u ein Spinor aus E, und bezeichne u auch den entsprechenden Vektor im Spinormodul $\Delta\cong S_x$. Benutzt man jetzt die Realisierung des Spinormoduls als Raum der $(0,*)$–Formen (siehe Anhang A), d.h. $\Delta = \oplus_{r=0}^{2k+1}\Delta_r$ und $\Delta_r = \mathrm{span}\{\bar{\mathrm{f}}^{\,i_1}\wedge\ldots\bar{\mathrm{f}}^{\,i_r}\}$, so kann man sofort einen Vektor in E_x hinschreiben. Er entspricht dem schon in Kapitel 2 betrachtete Spinor (siehe Formel (2.8)). Man definiert

$$\begin{aligned} u_- &:= \tfrac{1}{l!}\,\Theta^l\wedge\bar{\mathrm{f}}^{\,2k+1} && \in \Lambda^{0,2l+1}\cong\Delta_k \\ u_+ &:= \tfrac{1}{(l+1)!}\,i\,\Theta^{l+1} && \in \Lambda^{0,2l+2}\cong\Delta_{k+1}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

wobei $\Theta = \sum_{j=1}^k(\bar{\mathrm{f}}^{\,j}\wedge\bar{\mathrm{f}}^{\,k+j})$ und $k=2l+1$. Der Nachweis, daß der Spinor $u=u_-+u_+$ in E_x liegt, ist eine leichte Rechnung. So ergibt sich z.B. die erste Gleichung für einen Basisvektor $Z=\mathrm{f}_i$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} -\xi\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\cdot u_+ &= 2\,\bar{\mathrm{f}}^{\,2k+1}\wedge\bar{\mathrm{f}}_{\,i}\lrcorner\left(\tfrac{i}{(l+1)!}\,\Theta^{l+1}\right) \\ &= \tfrac{2}{l!}\,i\,\bar{\mathrm{f}}^{\,2k+1}\wedge(\bar{\mathrm{f}}_{\,i}\lrcorner\,\Theta)\wedge\Theta^l \\ &= 2\,i\,\bar{\mathrm{f}}^{\,k+i}\wedge\left(\tfrac{1}{l!}\,\Theta^l\wedge\bar{\mathrm{f}}^{\,2k+1}\right) \\ &= 2\,\mathrm{f}_{k+i}\cdot u_- \\ &= \phi(\bar{\mathrm{f}}_i)\cdot u_- . \end{aligned}$$

Zum Beweis der zweiten Gleichung bemerkt man

$$\bar{\xi}\cdot u_+ \;=\; 2\,\bar{\mathrm{f}}_{\,2k+1}\cdot u_+ \;=\; 2i\,\bar{\mathrm{f}}_{\,2k+1}\lrcorner\left(\tfrac{i}{(l+1)!}\,\Theta^{l+1}\right) \;=\; 0. \tag{5.11}$$

Die Gleichungen, die das Unterbündel E definieren, entsprechen gerade den Killing–Spinor Gleichungen in der homogenen Situation von Kapitel 2, wenn man dort die kovariante Ableitung mit Hilfe der Abbildung $\widetilde{\Lambda}$ ausdrückt, und deren spezielle Form bezüglich der Basis $\{\mathrm{f}_i\}$ ausnutzt (siehe Formeln (2.3)).

Eine rein kombinatorische Überlegung, die entsprechend umständlich aufzuschreiben ist, zeigt schließlich die Eindeutigkeit der Lösung bis auf einen Faktor, d.h., E ist ein Linienbündel. Der Beweis des Theorems ist damit abgeschlossen.

Anhang A. Der Spinormodul

In diesem Anhang sollen zwei Realisierungen des Spinormoduls beschrieben werden (siehe z.B. [BFGK90] und [CFG89]). Sei E ein 2m–dimensionaler euklidischer Vektorraum mit nicht–ausgearteten Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und $\{e_1,\dots,e_{2m}\}$ eine orthonormale Basis von E bezüglich $(\cdot,\cdot)$.

Die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(E)$ ist dann die Algebra über $\mathbb{R}$, die multiplikativ von $e_1,\dots,e_{2m}$ erzeugt wird, wobei folgende Relationen gelten:

$$e_i\cdot e_j+e_j\cdot e_i=0 \qquad \text{für } i\neq j \qquad \text{und} \qquad e_i\cdot e_i=-1.$$

Da E ein Vektorraum gerader Dimension ist, hat man den Isomorphismus

$$\widetilde{\rho}:\quad \mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}(E)\xrightarrow{\sim}\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta) \tag{A.1}$$

von komplexen Algebren. Dabei bezeichnet $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}(E)$ die Komplexifizierung der Cliffordalgebra und

$$\Delta := \underbrace{\mathbb{C}^2\otimes\ldots\otimes\mathbb{C}^2}_{m\ \mathrm{mal}} \tag{A.2}$$

ist ein komplexer Vektorraum der Dimension 2^m. Zur Definition von $\widetilde{\rho}$ seien die folgenden Bezeichnungen vereinbart:

$$g_1=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\quad g_2=\begin{pmatrix} 0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Man definiert $\widetilde{\rho}$ auf der Basis $\{e_j\}$ durch

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}(e_{2j-1}) &= I\otimes\ldots\otimes I\otimes g_1\otimes\underbrace{T\otimes\ldots\otimes T}_{(j-1)\ \mathrm{mal}}\\ \widetilde{\rho}(e_{2j}) &= I\otimes\ldots\otimes I\otimes g_2\otimes\underbrace{T\otimes\ldots\otimes T}_{(j-1)\ \mathrm{mal}}.\end{aligned}$$

Schränkt man den Isomorphismus $\widetilde{\rho}$ auf die Spin–Gruppe ein, $Spin(2m)\subset\mathrm{Cl}(E)$, so erhält man die als *Spinor–Darstellung* bezeichnete 2^m–dimensionale Darstellung der Gruppe $Spin(2m)$. Das Paar $(\widetilde{\rho},\Delta)$ nennt man *Spinormodul.* Der Modul Δ zerfällt in zwei irreduzible unitäre Spin–Darstellungen, $\Delta=\Delta_-\oplus\Delta_+$, die den Eigenunterräumen des Endomorphismus $\widetilde{\rho}(e_1\cdot\ldots\cdot e_{2m})$ zu den Eigenwerten $\pm i^m$ entsprechen.

Sei $u(\pm1):=\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{\mp i}\in\mathbb{C}^2$, dann definiert man $u(\varepsilon):=u(\varepsilon_1)\otimes\ldots\otimes u(\varepsilon_m)$ mit $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ und $\varepsilon_j=\pm1$. Die Vektoren $\{u(\varepsilon)\}$ bilden eine orthonormale Basis des Spinormoduls bzgl. des Standard–Skalarprodukts in $\mathbb{C}^{2^m}$ und es gilt

$$\Delta_\pm \quad = \quad \mathrm{span}\{u(\varepsilon)\ :\ \prod_{j=1}^m\varepsilon_j=\pm1\}. \tag{A.4}$$

Die Vektoren $\{u(\varepsilon)\}$ sind genau die Gewichtsvektoren der $Spin(2m)$–Darstellung Δ. Um das zu sehen, sei $H := \sum_{j=1}^{m} t_j\, e_{2j-1} \cdot e_{2j}$ ein Vektor aus der Lie–Algebra des maximalen Torus in $Spin(2m)$. Dann gilt

$$\widetilde{\rho}(H)\, u(\varepsilon) \quad = \quad -i\,(\sum_{j=1}^{m} t_j\, \varepsilon_j)\, u(\varepsilon). \tag{A.5}$$

Hierbei wurde die Formel $\widetilde{\rho}(e_{2j-1} \cdot e_{2j})u(\varepsilon) = -i\,\varepsilon_j\, u(\varepsilon)$ benutzt, die sich direkt aus der Definition von $\widetilde{\rho}$ ergibt. Insbesondere sieht man, daß die Vektoren $\{u(\varepsilon)\}$ eine Basis von Eigenvektoren des Endomorphismus $\Omega_0 := -\sum_{k=1}^{m} e_{2k-1}e_{2k}\cdot$ darstellen. Es gilt

$$\Omega_0 u(\varepsilon) \quad = \quad (\sum_{k=1}^{m} i\varepsilon_j)\, u(\varepsilon) \quad = \quad i(m-2r)u(\varepsilon), \tag{A.6}$$

wobei r die Anzahl der ε_j's in ε ist mit $\varepsilon_j = -1$.

Es soll nun eine zweite Realisierung des Spinormoduls angegeben werden, die besonders günstig für spezielle Rechnungen ist. Dazu sei J eine komplexe Struktur auf dem Vektorraum E, die bezüglich der Basis $\{e_i\}$ durch $J(e_{2j-1}) = e_{2j}$ und $J(e_{2j}) = -e_{2j-1}$ gegeben ist. Sei dann $E \otimes \mathbb{C} = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$ die Aufspaltung in die $(\pm i)$–Eigenräume von J. Durch $\mathrm{f}_j := \frac{1}{2}(e_{2j-1} - ie_{2j})$ und $\bar{\mathrm{f}}_j := \frac{1}{2}(e_{2j-1} + ie_{2j})$ sind wieder Basen in $E^{1,0}$ und $E^{0,1}$ definiert. Bezeichne $\{\bar{\mathrm{f}}^i\}$ die zu $\{\bar{\mathrm{f}}_i\}$ duale Basis in $(E^{0,1})^*$, d.h. $\bar{\mathrm{f}}^i(\bar{\mathrm{f}}_j) = \delta_{ij}$. Der Spinormodul wird jetzt folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \Delta \quad &= \quad \oplus_{r=0}^{m} \Delta_r \\ \text{mit} \qquad & \Delta_r = \Lambda^{0,r}(E) = \operatorname{span}\{\bar{\mathrm{f}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\mathrm{f}}^{i_r} \;:\; 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le m\}. \end{aligned}$$

Die Clifford–Multiplikation definiert man zuerst für die Vektoren $\bar{\mathrm{f}}_j$ und f_j durch

$$\mathrm{f}_j \cdot\omega \quad := \quad i\,\bar{\mathrm{f}}^j \wedge \omega \qquad \text{und} \qquad \mathrm{f}_j \cdot\omega \quad := \quad i\,\bar{\mathrm{f}}_j \lrcorner\, \omega. \tag{A.7}$$

Dabei bezeichnet $\bar{\mathrm{f}}_j \lrcorner$ das innere Produkt, d.h. $\bar{\mathrm{f}}_j \lrcorner\, \bar{\mathrm{f}}^i = \delta_{ij}$. Aus der Definition der Vektoren f_j folgt
$e_{2j-1} = \mathrm{f}_j + \bar{\mathrm{f}}_j$ und $e_{2j} = i(\mathrm{f}_j - \bar{\mathrm{f}}_j)$ und somit erhält man für die Clifford–Multiplikation mit den reellen Vektoren

$$\begin{aligned} e_{2j-1}\cdot\omega \quad &= \quad i\,\bar{\mathrm{f}}^j \wedge \omega \;+\; i\,\bar{\mathrm{f}}_j \lrcorner\, \omega \\ e_{2j}\cdot\omega \quad &= \quad -\,\bar{\mathrm{f}}^j \wedge \omega \;+\; \bar{\mathrm{f}}_j \lrcorner\, \omega. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß $e_j \cdot e_j \cdot \omega = -\,\omega$ gilt, für $j = 1, \ldots, 2m$, d.h. es wurde eine Darstellung der Cliffordalgebra definiert. Als nächstes soll gezeigt werden, daß die Formen $\bar{\mathrm{f}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\mathrm{f}}^{i_r}$ wieder die Gewichtsvektoren der Spinor–Darstellung Δ sind.

Lemma A.1. *Die $(0,r)$–Form $\bar{\mathrm{f}}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\mathrm{f}}^{i_r}$ ist Gewichtsvektor zum selben Gewicht wie $u(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, falls $\varepsilon_{i_1} = \ldots = \varepsilon_{i_r} = -1$ und $\varepsilon_j = 1$ für die restlichen ε_j's gilt.*

Beweis. Zuerst sieht man, daß $e_{2j-1} \cdot e_{2j} = i\,(\bar{\mathrm{f}}_j \cdot \mathrm{f}_j - \mathrm{f}_j \cdot \bar{\mathrm{f}}_j)$ gilt. Für $\omega = \bar{\mathrm{f}}^{\,i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\mathrm{f}}^{\,i_r}$ und $I = (i_1, \ldots, i_r)$ folgt damit

$$e_{2j-1} \cdot e_{2j} \cdot \omega \quad = \quad \begin{cases} i\,\omega & \text{für} \quad j \in I \\ -i\,\omega & \text{für} \quad j \notin I. \end{cases} \tag{A.8}$$

Sei $\mu_j \in \{-1, +1\}$, $j = 1, \ldots, m$, mit $\mu_j = 1$ falls $j \notin I$ und $\mu_j = -1$ falls $j \in I$, so gilt

$$\widetilde{\rho}(H)\,\omega \quad = \quad -i\,(\sum_{j=1}^{m} t_j\,\mu_j)\,\omega \tag{A.9}$$

und man erhält die Behauptumg des Lemmas. $\square$

Anhang B. Beweis der Spektrumsabschätzung im Kähler–Fall

In diesem Anhang soll noch einmal der Beweis gegeben werden für die untere Abschätzung des Spektrums des Dirac–Operators auf kompakten Kählerschen Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalarkrümmung. Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich dann auch die Existenz von Kählerschen Killing–Spinoren im Grenzfall der entsprechenden Ungleichung. Der Beweis ist im wesentlichen enthalten in [Kir93] [Kir86] bzw. [Hij94].

Sei (M^{2m}, g, J) eine kompakte Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit. Die Einschränkung der Clifford–Multiplikation auf die Summanden $S_{r-1} \otimes TM^{1,0}$ bzw. $S_{r+1} \otimes TM^{0,1}$ sei mit μ^r_+ bzw. μ^r_- bezeichnet. Es gilt dann (siehe (1.15)):

$$\mu^r_+ : S_{r-1} \otimes TM^{1,0} \longrightarrow S_r \quad \text{bzw.} \quad \mu^r_- : S_{r+1} \otimes TM^{0,1} \longrightarrow S_r .$$

Umgekehrt hat man Einbettungen $i^r_\pm$ von S_r in die Tensorprodukte $S_{r-1} \otimes TM^{1,0}$ bzw. $S_{r+1} \otimes TM^{0,1}$. Auf Schnitten $\phi \in \Gamma(S_r)$ ist $i^r_\pm$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} i^r_+(\phi) &= -\tfrac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathrm{f}}_i \cdot \psi \otimes \mathrm{f}_i && \in \Gamma(S_{r-1} \otimes TM^{1,0}) \\ i^r_-(\phi) &= -\tfrac{1}{m-r} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{f}_i \cdot \psi \otimes \bar{\mathrm{f}}_i && \in \Gamma(S_{r+1} \otimes TM^{0,1}). \end{aligned}$$

Aus der Formel (1.8) folgt, daß $\sum_{i=1}^m \mathrm{f}_i \cdot \bar{\mathrm{f}}_i$ auf S_r als $-r\,\mathrm{Id}_{S_r}$ wirkt und $\sum_{i=1}^m \bar{\mathrm{f}}_i \cdot \mathrm{f}_i$ als $-(m-r)\,\mathrm{Id}_{S_r}$ Somit gilt:

$$\mu^r_\pm \circ i^r_\pm = \mathrm{Id}_{S_r},$$

d.h., die Abbildungen $i^r_\pm$ sind injektiv. Außerdem erhält man die Surjektivität von $\mu^r_\pm$, aus der sich unmittelbar die folgende Zerlegung des Tensorprodukts ergibt:

$$\begin{aligned} S_{r-1} \otimes TM^{1,0} &= i^r_+(S_r) \oplus \ker(\mu^r_+) \\ S_{r+1} \otimes TM^{0,1} &= i^r_-(S_r) \oplus \ker(\mu^r_-). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Die Projektionen auf die Summanden $i^r_\pm(S_r)$ sind gegeben durch: $p^r_\pm := i^r_\pm \circ \mu^r_\pm$. Um das zu beweisen, hat man nachzuweisen, daß $(p^r_\pm)^2 = p^r_\pm$ gilt, was aber ebenfalls aus Formel (1.8) folgt. Die Projektionen auf die Summanden $\ker(\mu^r_\pm)$ seien mit $q^r_\pm$ bezeichnet, d.h. $q^r_\pm = \mathrm{Id} - p^r_\pm$. Analog zum Riemannschen Fall kann man nun Dirac– und Twistor–Operatoren definieren, die der Zerlegung (B.1) und damit der Kähler–Situation angepaßt sind. Die entsprechenden Dirac–Operatoren $D_\pm$ waren bereits in Kapitel 1 eingeführt worden (vgl. (1.17)). Für sie gilt:

$$D_\pm|_{\Gamma(S_{\mp r})} = \mu^r_\pm \circ \nabla^\pm .$$

Dabei ist ∇^+ definiert durch $\nabla^+\phi = 2\sum_{i=1}^m \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i}\phi \otimes \mathrm{f}_i$ und ∇^- entsprechend durch $\nabla^-\phi = 2\sum_{i=1}^m \nabla_{\mathrm{f}_i}\phi \otimes \bar{\mathrm{f}}_i$ (vgl. (1.16)). Insbesondere hat man also:

$$D_\pm : \quad \Gamma(S_{r\mp 1}) \longrightarrow \Gamma(S_r).$$

Die Twistor–Operatoren werden entsprechend durch die Projektion der kovarianten Ableitung auf den zweiten Summanden definiert, d.h.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^r_+ : \Gamma(S_{r-1}) &\longrightarrow \Gamma(S_{r-1} \otimes TM^{1,0}),\\
\mathcal{D}^r_- : \Gamma(S_{r+1}) &\longrightarrow \Gamma(S_{r+1} \otimes TM^{0,1}),\\
\mathcal{D}^r_\pm &:= q^r_\pm \circ \nabla^\pm .
\end{aligned}
$$

Für die Twistor–Operatoren findet man die folgende lokale Gestalt.

$$\mathcal{D}^r_+\psi = 2\sum_{i=1}^m \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i}\psi \otimes \mathrm{f}_i \quad + \quad \tfrac{1}{r}\sum_{i=1}^m \bar{\mathrm{f}}_i \cdot D_+\psi \otimes \mathrm{f}_i, \tag{B.2}$$

$$\mathcal{D}^r_-\psi = 2\sum_{i=1}^m \nabla_{\mathrm{f}_i}\psi \otimes \bar{\mathrm{f}}_i \quad + \quad \tfrac{1}{m-r}\sum_{i=1}^m \mathrm{f}_i \cdot D_-\psi \otimes \bar{\mathrm{f}}_i. \tag{B.3}$$

Der Dirac–Operator D ist die Summe der Operatoren D_+ und D_-. Entsprechend findet man für die Summe der Twistor–Operatoren: $\mathcal{D}^r = \mathcal{D}^r_+ + \mathcal{D}^{m-r}_-$, wobei $\mathcal{D}^r$ den von K.D. Kirchberg eingeführten Kählerschen Twistor–Operator bezeichnet (siehe [Kir86]). Das nächste Lemma beschreibt die adjungierten Twistor–Operatoren $(\mathcal{D}^r_\pm)^*$, die zum Beweis der Abschätzung für den kleinsten Eigenwert benötigt werden. Dabei sei $\mathrm{div}^{1,0}(Z) := -2\sum_{i=1}^m(\nabla_{\mathrm{f}_i}Z, \mathrm{f}_i)$ und $\mathrm{div}^{0,1}\,\bar{Z} := -2\sum_{i=1}^m(\nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i}\bar{Z}, \bar{\mathrm{f}}_i)$, d.h., es gilt $\mathrm{div}(U) = \mathrm{div}^{1,0}(U) + \mathrm{div}^{0,1}(U)$ für beliebige komplexe Vektorfelder U.

Lemma B.1.

$$(\mathcal{D}^r_+)^*\,(\psi \otimes Z) \;=\; \mathrm{div}^{1,0}(Z) \;-\; \nabla_Z\psi \;-\; \tfrac{1}{2r}\,D_-(Z\cdot\psi) \tag{B.4}$$

$$(\mathcal{D}^r_-)^*\,(\psi \otimes \bar{Z}) \;=\; \mathrm{div}^{0,1}(\bar{Z}) \;-\; \nabla_{\bar{Z}}\psi \;-\; \tfrac{1}{2(m-r)}\,D_+(\bar{Z}\cdot\psi). \tag{B.5}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{D}^r_+)^*\psi \otimes Z, \phi) &= (\psi \otimes Z, \mathcal{D}^r_+\phi)\\
&= (\psi \otimes Z, 2\sum_{i=1}^m \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i}\phi \otimes \mathrm{f}_i \quad + \quad \tfrac{1}{r}\sum_{i=1}^m \bar{\mathrm{f}}_i \cdot D_+\phi \otimes \mathrm{f}_i)\\
&= \quad 2\sum_{i=1}^m(\psi, \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i}\phi)(Z, \mathrm{f}_i) \quad + \quad \tfrac{1}{r}\sum_{i=1}^m(\psi, \bar{\mathrm{f}}_i \cdot D_+\phi)(Z, \mathrm{f}_i)\\
&= -2\sum_{i=1}^m(\nabla_{\mathrm{f}_i}Z, \mathrm{f}_i)(\psi,\phi) \quad - \quad (\nabla_Z\psi, \phi) \quad - \quad \tfrac{1}{2r}(D_-(Z\cdot\psi), \phi).
\end{aligned}
$$

Hierbei wurden die folgenden Formeln benutzt:

$$\begin{aligned}
(Z, \mathrm{f}_i) &= 1/2\, Z^i \quad \textit{wobei} \quad Z = \sum_{i=1}^m Z^i\, \mathrm{f}_i \\
(Z \cdot \phi, \psi) &= (\phi, \bar{Z} \cdot \psi) \\
(\phi, \nabla_Z \psi) &= -(\nabla_{\bar{Z}} \phi, \psi) \\
(D_+ \phi, \psi) &= (\phi, D_- \psi).
\end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Gleichung verläuft analog. □

Die Abschätzung für den kleinsten Eigenwert des Dirac–Operators auf einer geschlossenen Kählerschen Mannigfaltigkeit ergibt sich nun aus dem folgenden Satz.

Satz B.2.

$$(\mathcal{D}_+^r)^* \mathcal{D}_+^r \;+\; (\mathcal{D}_-^{m-r})^* \mathcal{D}_-^{m-r} \;=\; \left(\tfrac{r-1}{r} + \tfrac{m}{4r^2}\right) D^2 \;-\; \tfrac{R}{4}\, Id_S \;-\; \tfrac{i}{4r^2} \left(D_+ \Omega D_- - D_- \Omega D_+\right).$$

Beweis. Für $x \in M$ sei die lokale Basis $\{\mathrm{f}_i\}$ so gewählt, daß im Punkt x $\nabla_{\mathrm{f}_i} \mathrm{f}_j = 0$ gilt. Insbesondere verschwindet in x dann auch $\mathrm{div}^{1,0}(\mathrm{f}_i)$ und $\mathrm{div}^{0,1}(\bar{\mathrm{f}}_i)$, und eine Rechnung in diesem Punkt ergibt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_+^r)^* \mathcal{D}_+^r\, \psi &= (\mathcal{D}_+^r)^* \sum_{i=1}^m (2 \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} \psi \otimes \mathrm{f}_i \;+\; \tfrac{1}{r} \bar{\mathrm{f}}_i \cdot D_+ \psi \otimes \mathrm{f}_i) \\
&= -\sum_{i=1}^m \big(2 \nabla_{\mathrm{f}_i} \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} \psi \;+\; \tfrac{2}{2r}\, D_-(\mathrm{f}_i \cdot \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} \psi) + \\
&\qquad +\; \tfrac{1}{r} \nabla_{\mathrm{f}_i} (\bar{\mathrm{f}}_i \cdot D_+ \psi) \;+\; \tfrac{1}{2r^2}\, D_-(\mathrm{f}_i \cdot \bar{\mathrm{f}}_i \cdot D_+ \psi) \,\big) \\
&= -\sum_{i=1}^m 2 \nabla_{\mathrm{f}_i} \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} \psi \;-\; \tfrac{1}{r}\, D_- D_+ \psi \;-\; \tfrac{1}{2r^2} D_- \left(-\tfrac{m}{2} Id_S - \tfrac{i}{2} \Omega\right) D_+ \psi.
\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$(\mathcal{D}_-^{m-r})^* \mathcal{D}_-^{m-r}\, \psi \;=\; -\sum_{i=1}^m 2 \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} \nabla_{\mathrm{f}_i} \psi \;-\; \tfrac{1}{r} D_+ D_- \psi \;-\; \tfrac{1}{2r^2}\, D_- \left(-\tfrac{m}{2} Id_S \;+\; \tfrac{i}{2} \Omega\right) D_+ \psi.$$

Benutzt man nun noch die Lichnerowicz–Formel $D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{R}{4}$ und die Beziehung $\nabla^* \nabla = -2 \sum_{i=1}^m (\nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i} \nabla_{\mathrm{f}_i} \;-\; \nabla_{\mathrm{f}_i} \nabla_{\bar{\mathrm{f}}_i})$, so folgt unmittelbar die Behauptung des Satzes. □

Theorem B.3. *Sei M eine geschlossene Kählersche Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung R. Jeder Eigenwert λ des Dirac–Operators D genügt dann der Ungleichung*

$$\lambda^2 \quad \geq \quad \frac{R_0}{4}\, \tfrac{m+1}{m}.$$

Dabei bezeichnet R_0 das Minimum der Skalarkrümmung, und m die komplexe Dimension von M.

Beweis. Zum Beweis des Theorems benötigt man das folgende Lemma.

Lemma B.4. *Sei ψ ein Eigenspinor zum Eigenwert λ, dann gilt:*

$$(\,\Omega D_-\psi,\, D_-\psi\,) \;-\; (\,\Omega D_+\psi,\, D_+\psi\,) \quad=\quad i\,(\,D^2\psi,\,\psi\,).$$

Beweis. Unter Ausnutzung der Kommutatorrelationen (1.20) und (1.21) erhält man zunächst:

$$(\Omega D_-\psi, D_-\psi) \;-\; (\Omega D_+\psi, D_+\psi) \quad=\quad (D_-\Omega\psi, D_-\psi) \;+\; 2i(D_-\psi, D_-\psi) - \tag{B.6}$$

$$-\;(D_+\Omega\psi, D_+\psi) \;+\; 2i(D_+\psi, D_+\psi) \tag{B.7}$$

Nutzt man nun noch die Voraussetzung $D\psi = (D_+ + D_-)\psi = \lambda\psi$, so ist die folgende Umformung möglich:

$$\begin{aligned}(D_-\Omega\psi, D_-\psi) \;-\; (D_+\Omega\psi, D_+\psi) &= (D_-\Omega\psi, -D_+\psi + \lambda\psi) \;-\; (D_+\Omega\psi, -D_-\psi + \lambda\psi)\\ &= (\Omega\psi, \lambda D_+\psi) \;-\; (\Omega\psi, \lambda D_-\psi)\\ &= (\Omega(D_+\psi + D_-\psi), D_+\psi) \;-\; (\Omega(D_+\psi + D_-\psi), D_-\psi)\\ &= (\Omega D_+\psi, D_+\psi) \;-\; (\Omega D_-\psi, D_-\psi).\end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis dieser Umformung in Gleichung (B.6) ein, so folgt die Behauptung des Lemmas. □

Sei ψ wieder ein Eigenspinor zum Eigenwert λ, dann liefert Satz B.2 zusammen mit Lemma B.4 nach Integration die Ungleichung

$$0 \quad\le\quad \left(\tfrac{r-1}{r} + \tfrac{m+1}{4r^2}\right)\lambda^2 \;-\; \tfrac{R_0}{4}.$$

Die Funktion $f(r) = \frac{r-1}{r} + \frac{m+1}{4r^2}$ ist minimal für $r = \frac{m+1}{2}$. Somit erhält man für dieses r die gesuchte Ungleichung, d.h., es folgt

$$\lambda^2 \quad\ge\quad \tfrac{R}{4}\,\tfrac{m+1}{m}.$$

□

Satz B.5. *Sei M eine geschlossene Kählersche Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung R, und Ψ ein Eigenspinor zum Eigenwert $\lambda = \pm\sqrt{R_0(m+1)/4m}$, dann ist Ψ ein Kählerscher Killing–Spinor zur Killing–Zahl $\mu = -\lambda/(m+1)$.*

Beweis. Unmittelbar aus dem Beweis von Theorem B.3 erhält man $\mathcal{D}_+^{(m+1)/2}\Psi = 0$ und $\mathcal{D}_-^{(m-1)/2}\Psi = 0$. Aus der Definition von $\mathcal{D}_\pm^r$ folgt dann

$$\nabla_{\bar Z}\Psi \quad=\quad -\tfrac{1}{m+1}\,\bar Z\cdot D_+\Psi \tag{B.8}$$

$$\nabla_Z\Psi \quad=\quad -\tfrac{1}{m+1}\,Z\cdot D_-\Psi. \tag{B.9}$$

Benutzt man nun die Formel $\sum_{i=1}^m \mathrm{f}_i\cdot\bar{\mathrm{f}}_i\cdot = -1/2(m+i\Omega)$ und die Definition der Unterbündel S_r, so ergibt sich

$$D_+\Psi \in S_{(m+1)/2} \quad\text{und}\quad D_-\Psi \in S_{(m-1)/2}.$$

Da nun aber $D\Psi = D_+\Psi + D_-\Psi = \lambda\Psi$ gilt, folgt

$$\Psi = \Psi_{(m+1)/2} + \Psi_{(m-1)/2}$$

mit $D_+\Psi_{(m+1)/2} = 0$ und $D_-\Psi_{(m-1)/2} = 0$. Schließlich hat man noch

$$D_+\Psi_{(m-1)/2} = D_+\Psi = \lambda\Psi_{(m-1)/2} \tag{B.10}$$

$$D_-\Psi_{(m+1)/2} = D_-\Psi = \lambda\Psi_{(m+1)/2}. \tag{B.11}$$

Setzt man diese Gleichungen in (B.8) ein, so folgt, daß Ψ ein Kählerscher Killing–Spinor ist, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_{\bar{Z}}\Psi_{(m+1)/2} &= 0 \\
\nabla_{\bar{Z}}\Psi_{(m-1)/2} &= -\tfrac{\lambda}{m+1}\,\bar{Z}\cdot\Psi_{(m+1)/2} \\
\nabla_{Z}\Psi_{(m+1)/2} &= -\tfrac{\lambda}{m+1}\,Z\cdot\Psi_{(m-1)/2} \\
\nabla_{Z}\Psi_{(m-1)/2} &= 0.
\end{aligned}$$

□

Anhang C. Das Spektrum des Dirac–Operators auf $\mathbb{C}P^{2m-1}$

In diesem Anhang soll das Spektrum des Dirac–Operators auf dem komplex–projektiven Raum $\mathbb{C}P^{2m-1}$ berechnet werden. Die Rechnung basiert auf der Standardmethode für die Spektrenberechnungen auf symmetrischen Räumen. Zusätzlich wird das Spektrum des Dirac–Operators auf Schnitten im Unterbündel S_0 durch eine zweite Methode hergeleitet. Die hier aufgeführten Rechnungen sind im wesentlichen im Preprint [SS93] enthalten. In der Arbeit [CFG89], die allerdings fehlerhaft ist, wird das Spektrum des Dirac–Operators nach einer dritten Methode bestimmt (ohne die Berechnung von Wurzellängen).

Theorem C.1. *Der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ (n ungerade) sei mit der Fubini–Study–Metrik versehen. Das Spektrum des Dirac–Operators D besteht dann aus den zwei Serien $\{\pm\sqrt{\lambda_{l,k}}\}$ und $\{\pm\sqrt{\mu_{l,k}}\}$, wobei*

$$\begin{aligned} \lambda_{l,k} &= (l+\tfrac{n-1}{2})(l+n-k) \\ & \qquad k\in\{1,\dots,n\} \;\; \textit{und} \;\; l\geq \max\{1,k-\tfrac{n-1}{2}\} \\ \mu_{l,k} &= (l+\tfrac{n+1}{2})(l+n-k) \\ & \qquad k\in\{0,\dots,n-1\} \;\; \textit{und} \;\; l\geq \max\{0,k-\tfrac{n-1}{2}\}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Der Beweis des Theorems ist folgendermaßen aufgebaut. Zuerst werden die notwendigen Bezeichnungen und Parametrisierungen eingeführt. Danach, im zweiten Abschnitt, wird die Zerlegung des Spinorbündels auf dem komplex–projektiven Raum angegeben. Im dritten Abschnitt werden die Formeln zusammengestellt, die den Dirac–Operator auf kompakten symmetrischen Räumen beschreiben. Insbesondere wird das Peter–Weyl–Theorem formuliert, und es wird das Quadrat des Dirac–Operator als Summe von Casimir–Operatoren dargestellt. Im vierten Abschnitt werden die Verzweigungsregeln aus [CFG89] bzw. [IT78] zitiert. Damit können dann im fünften Abschnitt die expliziten Rechnungen durchgeführt werden. Der sechste Abschnitt enthält schließlich eine unabhängige Herleitung des Spektrums des Dirac–Operators eingeschränkt auf Schnitte des Unterbündels S_0 . Dem Beweis vorangestellt seien jetzt noch einige Bemerkungen zum Theorem.

(1) Der kleinste Eigenwert wird auf den Unterbündeln $S_{\frac{n-1}{2}}$ bzw. $S_{\frac{n+1}{2}}$ angenommen. Man findet
$$\mu_{0,\frac{n-1}{2}} = \tfrac{(n+1)^2}{4} \quad \text{und} \quad \lambda_{1,\frac{n+1}{2}} = \tfrac{(n+1)^2}{4}.$$
Somit realisiert der komplex–projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ den Grenzfall in der unteren Abschätzung des Spektrums des Dirac–Operators auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten. Es gilt nämlich
$$\lambda^2 \;\geq\; \tfrac{1}{4}\tfrac{\dim M+2}{\dim M}\,R_0 \;=\; \tfrac{1}{4}\tfrac{2n+2}{2n}\,n(n+1) \;=\; \tfrac{(n+1)^2}{4}.$$
Dabei ist λ ein beliebiger Eigenwert des Dirac–Operators auf einer geschlossenen Kählerschen Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung R ($R_0 = \min R$).

(2) Das Spektrum des Dirac–Operators auf Schnitten des Unterbündels S_k entspricht gerade den Serien $\{\pm\sqrt{\lambda_{l,k}}\}$ und $\{\pm\sqrt{\mu_{l,k}}\}$.

(3) Das Spektrum von D^2 auf $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ ist gegeben durch

$$\mu_{l,0} = (l+1)^2 \quad \text{und} \quad \lambda_{l,0} = l^2.$$

(4) Das Spektrum von D^2 auf dem Unterbündel S_0 ist gegeben durch

$$\mu_{l,0} \;=\; (l + \tfrac{n+1}{2})(l+n).$$

(5) Zwischen den beiden Serien gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mu_{l,\frac{n-1}{2}} &= \lambda_{l+1,\frac{n+1}{2}} \;=\; (l+\tfrac{n+1}{2})^2 \\ \mu_{l+\frac{n-1}{2}-k,n-k} &= \lambda_{l,k} \\ \mu_{l-\frac{n+1}{2},0} &= \lambda_{l,n}. \end{aligned}$$

C.1. Bezeichnungen . Im weiteren wird das Riemannsche symmetrische Paar (vgl. [Hel78], ch.IV) (G,K) betrachtet. Dabei ist $G = SU(n+1)$ eine kompakte halbeinfache Liesche Gruppe und

$$K \;=\; S(U(n)\times U(1)) \;=\; \{\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A^{-1}\end{smallmatrix}\right) \mid A \in U(n)\} \;\simeq\; U(n)$$

eine reduktive Untergruppe.
Seien $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{k}_0$ die (reellen) Lie–Algebren der Gruppen G und K und $\mathfrak{p}_0$ bezeichne das orthogonale Komplement von $\mathfrak{k}_0$ in $\mathfrak{g}_0$ bezüglich der Killing–Form $B(\cdot,\cdot)$. Für die hier betrachteten Gruppen G und K ist die Killing–Form ein Vielfaches der Spurform, es gilt

$$B(X,Y) = 2(n+1)\,\mathrm{Tr}(XY).$$

Mit der gewählten Einbettung der Gruppe K in G erhält man

$$\mathfrak{p}_0 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & X \\ -X^t & 0\end{smallmatrix}\right) \mid X \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Die komplexifizierten Lie–Algebren von $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ usw. werden mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ usw. bezeichnet. Für die weiteren Rechnungen wird der folgende maximale Torus fixiert:

$$T = \{\mathrm{diag}(e^{i\beta_1},\ldots,e^{i\beta_{n+1}}) \mid \beta_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j = 0\}, \tag{C.2}$$

Der Torus T ist ein maximaler Torus für G und K und hat die (komplexifizierte) Lie–Algebra

$$\mathfrak{t} = \{\beta := \mathrm{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_{n+1}) \mid \beta_k \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j = 0\}. \tag{C.3}$$

Die duale Lie–Algebra ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{t}^* = \{\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j \varepsilon_j \mid \tau_j \in \mathbb{C}\},$$

wobei $\varepsilon_k(\beta) = \beta_k$. Das Element $\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j \varepsilon_j$ wird jetzt mit $(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1})$ bezeichnet.
Aus der Gleichung $\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 0$ folgt $\beta_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j$, d.h. der Torus T ist n–dimensional. Außerdem gilt

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tau_j \varepsilon_j(\beta) = \sum_{j=1}^{n} \tau_j \beta_j - \sum_{j=1}^{n} \tau_{n+1} \beta_j = \sum_{j=1}^{n} (\tau_j - \tau_{n+1}) \beta_j .$$

Setzt man

$$t_j := \tau_j - \tau_{n+1} \tag{C.4}$$

für $j = 1, \ldots, n$, so erhält man eine Parametrisierung der Elemente von $\mathfrak{t}^*$ als n–Vektoren, die mit

$$[t_1, \ldots, t_n].$$

bezeichnet wird. Man findet leicht die folgende Inversionsformel:

$$\tau_j := \begin{cases} t_j + t & \text{für } j = 1, \ldots, n \\ t & \text{für } j = n+1 \end{cases},$$

mit $t = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} t_j$. Im weiteren wird von beiden Möglichkeiten der Parametrisierung Gebrauch gemacht ohne jeweils darauf hinzuweisen.

Sei $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{t}$. Es wird von den einfachen Wurzeln

$$\prod := \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n\} \tag{C.5}$$

erzeugt, d.h. $\Phi = \{\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \;:\; 1 \leq i \neq j \leq n+1\}$ Mit Φ^+ wird das der Menge der einfachen Wurzeln $\sum$ entsprechende positive System bezeichnet. Sei $\delta_G := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ die Halbsumme der positiven Wurzeln. Dann gilt

$$\delta_G = (\tfrac{n}{2}, \tfrac{n}{2} - 1, \ldots, -\tfrac{n}{2}).$$

Da T auch für K ein maximaler Torus ist, kann man das Wurzel–System $\Phi_K := \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$, definieren, das erzeugt wird von der Menge der einfachen Wurzeln

$$\prod_K := \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1\}. \tag{C.6}$$

Die entsprechende Halbsumme der positiven Wurzeln ist

$$\delta_K = (\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n-1}{2} - 1, \ldots, -\tfrac{n-1}{2}, 0).$$

Das Gewicht $(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1})$ ist dominant bezüglich Φ^+ , falls $\tau_1 \geq \ldots \geq \tau_{n+1}$ gilt und ganzzahlig, falls $\tau_i - \tau_j$ für alle i, j ganzzahlig ist.
Für die n–Vektoren bedeutet das $[t_1, \ldots, t_n]$ ist dominant, falls $t_1 \geq \ldots \geq t_n \geq 0$ und ganzzahlig, falls alle t_i ganze Zahlen sind.

C.2. Der komplex–projektive Raum. Der komplex–projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ kann als kompakter Riemannscher symmetrischer Raum G/K realisiert werden. Dabei sind G bzw. K die im Abschnitt C.1 betrachteten Gruppen. Fixiert man den Punkt $x_0 := eK$ in G/K, so kann man $\mathfrak{p}_0$ mit dem Tangentialraum in x_0 identifizieren, $\mathfrak{p}_0 \cong T_{x_0}G/K$. Als Riemannsche Metrik g auf G/K benutzt man die von der Killing–Form B induzierte Metrik. Diese ist gerade das (n+1)–fache der Fubini–Study–Metrik. Die Skalarkrümmung von $(G/K, g)$ ist $n/2$.

Homogene Spinstrukturen auf symmetrischen Räumen G/K entprechen Hebungen $\widetilde{\alpha}$ der Isotropiedarstellung

$$\alpha : \quad K \to SO(T_{x_0}G/K) \simeq SO(2n).$$

Das bedeutet, $\widetilde{\alpha}$ ist ein Homomorphismus $K \to Spin(2n)$ mit $\alpha = \lambda \circ \widetilde{\alpha}$. Dabei ist $\lambda : Spin(2n) \to SO(2n)$ die nicht–triviale zweifache Überlagerung von $SO(2n)$. Der komplex–projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ besitzt eine Spinstruktur genau dann, wenn n ungerade ist. Diese Spinstruktur ist eindeutig bestimmt und homogen.

Sei $\widetilde{\rho} : \mathrm{Cl}_{2n} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Delta, \Delta)$ eine irreduzible Darstellung der Clifford–Algebra (diese ist eindeutig bis auf Äquivalenz), d.h. Δ bezeichnet den Spinormodul. Die Einschränkung von $\widetilde{\rho}$ auf $Spin(2n)$ wird ebenfalls mit $\widetilde{\rho}$ bezeichnet. Das Spinorbündel S von $\mathbb{C}P^n$ ist dann als assoziiertes Bündel $S = G \times_{\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}} \Delta$ gegeben. Das nächste Lemma beschreibt die Zerlegung der K–Darstellung $(\widetilde{\rho} \circ \widetilde{\alpha}, \Delta)$ in irreduzible Komponenten (siehe [Par67], [CFG89]).

Lemma C.2. *Die Darstellung $(\widetilde{\rho} \circ \widetilde{\alpha}, \Delta)$ der Gruppe $K = S(U(n) \times U(1))$ zerfällt in $(n+1)$ irreduzible Komponenten*

$$\Delta = \bigoplus_{k=0}^{n} \Delta_k. \tag{C.7}$$

Hierbei ist Δ_k die Darstellung mit dem höchsten Gewicht

$$\nu_k = (\tfrac{n+1}{2} - k, \ldots, \underset{(n-k).}{\tfrac{n+1}{2} - k}, \underset{(n-k+1).}{\tfrac{n-1}{2} - k}, \ldots, \tfrac{n-1}{2} - k).$$

Die Schreibweise $(\ldots, \underset{(i).}{x}, \ldots)$ bedeutet, daß der Eintrag x an der i-ten Stelle steht.

Bemerkung. *Es ist leicht zu sehen, daß die höchsten Gewichte ν_k der irreduziblen Komponenten Δ_k alle von der Form $w\delta_G - \delta_K$ sind, wobei w irgendein Element der Weyl–Gruppe W^G ist (vgl.* [Par67]*).*

Der Zerlegung (C.7) entspricht eine Zerlegung des Spinorbündels in eine Summe von Unterbündeln, d.h.

$$S = \bigoplus_{k=0}^{n} S_k. \tag{C.8}$$

C.3. Der Dirac–Operator. Die folgende Beschreibung des Dirac–Operators auf dem symmetrischen Raum G/K entspricht der in [CFG89] (vgl. auch [AS77]). Für die Schnitte im Spinorbündel wird die folgende Identifizierung benutzt:

$$C^\infty(G/K,S) \simeq (C^\infty(G)\otimes\Delta)^K, \tag{C.9}$$

dabei bezeichnet $(\cdots)^K$ den Unterraum der K–Invarianten, wobei K auf $C^\infty(G)$ durch Rechtstranslation und auf Δ durch $s := \widetilde{\rho}\circ\widetilde{\alpha}$ wirkt.

Sei $\{X_i\}_{i=1,\dots,2n}$ eine orthonormale Basis von $\mathfrak{p}_0$. Jeder Vektor X_i bestimmt dann durch infinitesimale Rechtstranslation ein linksinvariantes Vektorfeld $r(X_i)$. Bezüglich der Identifikation (C.9) ist der Dirac–Operator auf S gegeben durch

$$D \;=\; \sum_{i=1}^{m} r(X_i)\otimes\widetilde{\rho}(X_i):\;(C^\infty(G)\otimes\Delta)^K \longrightarrow (C^\infty(G)\otimes\Delta)^K. \tag{C.10}$$

Es ist leicht zu sehen, daß der Dirac–Operator mit der G–Wirkung kommutiert und insbesondere die K–Invarianten in $C^\infty(G)\otimes\Delta$ erhält.

Schnitte im Spinorbündel können auch mit K–invarianten Δ–wertigen Funktionen auf G identifiziert werden, d.h. mit Funktionen $f: G\to\Delta$, mit $f(gk) = s(k^{-1})f(g)$ für alle $g\in G$ und alle $k\in K$. Der Raum all dieser Funktionen sei mit $C^\infty(G,\Delta)^K$ bezeichnet.

Unter Benutzung des hermiteschen Skalarprodukts auf den Spinormoduln Δ kann man ein Skalarprodukt auf $C^\infty(G,\Delta)^K$ definieren und die entsprechende Hilbert–Raum Vervollständigung $\mathcal{L}^2(G,\Delta)^K$ betrachten. Der Dirac–Operator setzt sich dann fort zu einem selbstadjungierten Operator auf $\mathcal{L}^2(G,\Delta)^K$.

Bezeichne jetzt $\hat{G}$ das unitäre Dual von G und sei (V_γ,π_γ) für $\gamma\in\hat{G}$ ein Repräsentant der Äquivalenzklasse γ. Die Frobenius–Reziprozität und das Peter–Weyl–Theorem beschreiben die $\mathcal{L}^2$–Schnitte im Unterbündel S_k

$$\mathcal{L}^2(S_k) = \bigoplus_{\gamma\in\hat{G}} V_\gamma\otimes\mathrm{Hom}_K(V_\gamma,\Delta_k). \tag{C.11}$$

Dabei ist $\bigoplus$ eine direkte, orthogonale Summe, und $\mathrm{Hom}_K(V_\gamma,\Delta_k)$ bezeichnet den Raum der K–invarianten Homomorphismen $V_\gamma\to\Delta_k$ (siehe [Wal73]).

Alle Summanden sind endlichdimensional und invariant unter der Wirkung des Dirac–Operators. Die Elemente $v\otimes A$ aus $V_\gamma\otimes\mathrm{Hom}_K(V_\gamma,\Delta_k)$ definieren durch $(v\otimes A)(g) := A\circ\pi_\gamma(g^{-1})v$ glatte Schnitte des Bündels S_k und liegen somit im Definitionsbereich des Dirac–Operators.

Die Einschränkung von D auf $V_\gamma\otimes\mathrm{Hom}_K(V_\gamma,\Delta_k)$ hat die Form $1\otimes\mathrm{D}_\gamma$ und das Spektrum von D ist somit vollständig durch die Spektren der Operatoren D_γ bestimmt. Bezüglich der Basis $\{X_i\}$ von $\mathfrak{p}_0$ kann D_γ geschrieben werden als

$$\mathrm{D}_\gamma(A) \;=\; -\sum_{i=1}^{2n}\widetilde{\rho}(X_i)\circ A\circ\pi_{\gamma *}(X_i),$$

für $A \in \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, \Delta_k)$. Aus diesem Ausdruck für D_γ folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\gamma^2\, A \;=\;& \sum_{i,j} \widetilde{\rho}(X_i)\widetilde{\rho}(X_j) \circ A \circ \pi_{\gamma *}(X_j)\pi_{\gamma *}(X_i) \\ =\;& -\sum_i A \circ \pi_{\gamma *}(X_i)\pi_{\gamma *}(X_i) \;+\; \sum_{i<j} \widetilde{\rho}(X_i)\widetilde{\rho}(X_j) \circ A \circ \pi_{\gamma *}([X_j, X_i]) \\ =\;& -\sum_i A \circ \pi_{\gamma *}(X_i)\pi_{\gamma *}(X_i) \;-\; \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \widetilde{\rho}(X_i)\widetilde{\rho}(X_j) \circ A \circ \pi_{\gamma *}([X_i, X_j]).\end{aligned} \tag{C.12}$$

Sei $\{Z_l\}$ eine orthonormale Basis für $\mathfrak{k}_0$ (bezüglich $-B$), dann gilt
$[X_i, X_j] = -\sum_l B([X_i, X_j], Z_l)Z_l \quad ([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \in \mathfrak{k})$ und folglich

$$\mathrm{D}_\gamma^2\, A = -\sum_i A \circ \pi_{\gamma *}(X_i)\pi_{\gamma *}(X_i) + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j,l} B([X_i, X_j], Z_l)\widetilde{\rho}(X_i)\widetilde{\rho}(X_j) \circ A \circ \pi_{\gamma *}(Z_l). \tag{C.13}$$

Da A in $\mathrm{Hom}_K(V_\gamma, \Delta)$ liegt, kann man A und $\pi_{\gamma *}(Z_l)$ vertauschen, d.h.

$$A \circ \pi_{\gamma *}(Z_l) = s_*(Z_l) \circ A.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\gamma^2\, A &= -\sum_i A \circ \pi_{\gamma *}(X_i)\pi_{\gamma *}(X_i) - \tfrac{1}{2}\sum_{i,j,l} B([Z_l, X_j], X_i)\widetilde{\rho}(X_i)\widetilde{\rho}(X_j)s_*(Z_l) \circ A \\ &= -\sum_i A \circ \pi_{\gamma *}(X_i)\pi_{\gamma *}(X_i) + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j,l} \widetilde{\rho}([Z_l, X_j], X_i)\widetilde{\rho}(X_j)s_*(Z_l) \circ A \\ &= -\sum_i A \circ \pi_{\gamma *}(X_i)\pi_{\gamma *}(X_i) - 2\sum_l s_*(Z_l) \circ s_*(Z_l) \circ A.\end{aligned} \tag{C.14}$$

Hier wurde noch benutzt, daß $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ gilt, d.h. $[Z_l, X_j] = -\sum_i B([Z_l, X_j], X_i)X_i$. Außerdem kam noch die wohlbekannte Formel $s_*(Z_l) = -\frac{1}{4}\sum_j \widetilde{\rho}([Z_l, X_j])\widetilde{\rho}(X_j)$ zur Anwendung.
Die Casimir–Operatoren Ω_G von G und Ω_K von K sind folgendermaßen definiert:

$$\Omega_G \;=\; -\sum_i X_i^2 \;-\; \sum_l Z_l^2 \;\text{ und }\; \Omega_K \;=\; -\sum_l Z_l^2.$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich

$$\mathrm{D}_\gamma^2\, A \;=\; A \circ \pi_{\gamma *}(\Omega_G) \;-\; A \circ \pi_{\gamma *}(\Omega_K) + 2s_*(\Omega_K) \circ A.$$

Vertauscht man wieder A und $\pi_{\gamma *}(\Omega_K)$ $(A \in \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, \Delta))$, so erhält man

$$\mathrm{D}_\gamma^2\, A \;=\; A \circ \pi_{\gamma *}(\Omega_G) \;+\; s_*(\Omega_K) \circ A.$$

Ganz allgemein gilt , daß der Casimir–Operator Ω_K einer kompakten Gruppe K auf dem zum höchstem Gewicht μ gehörenden irreduziblen K–Modul als Multiplikation mit dem Skalar $\|\mu + \delta_K\|^2 - \|\delta_K\|^2$ wirkt. Hieraus und aus der Bemerkung nach Lemma C.2 folgt, daß der Casimir–Operator auf Δ_k als Multiplikation mit

$$\|w\delta_G\|^2 \;-\; \|\delta_K\|^2 \;=\; \|\delta_G\|^2 \;-\; \|\delta_K\|^2$$

wirkt und somit auf allen Komponenten Δ_k des Spinormoduls Δ dieselbe Gestalt hat. Für $G = SU(n+1)$ und $K = S(U(n) \times U(1))$ erhält man

$$s_*(\Omega_K) \ = \ \tfrac{n}{8} \cdot \mathrm{Id}\,.$$

Analog wirkt der Operator Ω_G auf der irreduziblen G–Darstellung (V_γ, γ) (zum höchstem Gewicht μ_γ) als Multiplikation mit

$$\|\mu_\gamma \ + \ \delta_G\|^2 \ - \ \|\delta_G\|^2.$$

Mit diesen Formeln ist es möglich, das Quadrat des Dirac–Operators als Summe von Casimir–Operatoren auszudrücken und seine Wirkung auf $\mathrm{Hom}_K(V_\gamma, \Delta)$ mit Hilfe der höchsten Gewichte von (V_γ, π_γ) zu berechnen.

Satz C.3. *Der Operators* D^2_γ *hat auf* $\mathrm{Hom}_K(V_\gamma, \Delta)$ *die Form*

$$\mathrm{D}^2_\gamma \ = \ (\|\mu_\gamma + \delta_G\|^2 - \|\delta_G\|^2 \ + \ \tfrac{n}{8})\,\mathrm{Id}\,. \tag{C.15}$$

Dabei ist μ_γ *das höchste Gewicht der Darstellung* (V_γ, π_γ) *und* $\|\cdot\|$ *das von der Killing–Form induzierte Skalarprodukt auf* $\mathfrak{t}^*$*.*

C.4. Verzweigungsregeln. Das Lemma C.2 liefert die Zerlegung des Spinormoduls als K–Darstellung

$$\Delta \ = \ \bigoplus_{k=0}^{n} \Delta_k \tag{C.16}$$

mit den höchsten Gewichten $\nu_k = [\underbrace{\tfrac{n+1}{2} - k, \ldots, \ \tfrac{n+1}{2} - k}_{(n-k)} \ , \tfrac{n-1}{2} - k, \ldots, \tfrac{n-1}{2} - k]$. Um das Spektrum des Dirac–Operators auf S_k, für $k = 0, \ldots, n$, zu bestimmen, hat man die Darstellungen $\gamma \in \hat{G}$ zu finden, für die $\mathrm{Hom}_K(V_\gamma, \Delta_k) \neq \{0\}$ gilt, d.h. die $\gamma \in \hat{G}$, für die die Zerlegung von $V_\gamma\big|_K$ in irreduzible Komponenten die K–Darstellung Δ_k enthält. Diese Darstellungen können mit der folgenden Verzweigungsregel gefunden werden.

Satz C.4. *(cf.* [CFG89], [IT78]*) Die irreduziblen Darstellungen der Gruppe* $G = SU(n+1)$ *zum höchsten Gewicht* $\mu = [m_1, \ldots, m_n]$ *zerfallen unter der Wirkung der Untergruppe* $K = S(U(n) \times U(1))$ *in eine direkte Summe irreduzibler K–Darstellungen mit den höchsten Gewichten* $\nu = [s_1 - l, \ldots, s_n - l]$*, dabei ist* $l = \sum_{i=1}^n (m_i - s_i)$*, und die* s_i*'s sind ganze Zahlen mit*

$$m_1 \geq s_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n \geq s_n \geq 0.$$

Die Multiplizität jeder dieser Darstellungen ist 1.

Dieser Satz soll jetzt angewandt werden für $\nu = [s_1 - l, \ldots, s_n - l] = \nu_k$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} s_1 = \ldots = s_{n-k} &= \tfrac{n+1}{2} - k + l \\ s_{n-k+1} = \ldots = s_{n-l} &= \tfrac{n-1}{2} - k + l. \end{aligned}$$

Die Zahlen m_i bestimmen sich daher aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1 &= s_1 + x, && x \geq 0, x \in \mathbb{N} \\ m_2 = \ldots = m_{n-k} &= \tfrac{n+1}{2} - k + l && \\ m_{n-k+1} = s_{n-k+1} + \varepsilon &= \tfrac{n-1}{2} - k + l + \varepsilon, && \varepsilon \in \{0, 1\} \\ m_{n-k+2} = \ldots = m_n &= \tfrac{n-1}{2} - k + l. && \end{aligned} \tag{C.17}$$

Berechnet man die Summe der $(m_i - s_i)$, so folgt $l = x + \varepsilon$, d.h. $x = l - \varepsilon$. Damit gilt $l \geq \varepsilon$ und das Gleichungssytem für die m_i nimmt die folgende Form an:

$$\begin{aligned} m_1 &= \tfrac{n+1}{2} - k + 2l - \varepsilon \\ m_2 = \ldots = m_{n-k} &= \tfrac{n+1}{2} - k + l \\ m_{n-k+1} &= \tfrac{n-1}{2} - k + l + \varepsilon \\ m_{n-k+2} = \ldots = m_n &= \tfrac{n-1}{2} - k + l. \end{aligned} \tag{C.18}$$

Aus diesem System und der Bedingung $m_j \geq 0$ (da μ dominant ist) erhält man

$$l \;\geq\; \max\{k - \tfrac{n-1}{2}, \varepsilon\}.$$

Als nächstes ersetzt man n–Vektoren durch $(n+1)$–Vektoren. Sei $\mu = [m_1, \ldots, m_n]$ gegeben durch (C.18), dann entspricht μ ein $(n+1)$–Vektor $\hat{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$ $\quad (\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 0)$, mit

$$\begin{aligned} \mu_j &= m_j - \mu_0 && \text{für } j = 1, \ldots, n \\ \mu_{n+1} &= -\mu_0 && \\ \mu_0 &= \tfrac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} m_j \;=\; \tfrac{n}{2} - k + l. && \end{aligned} \tag{C.19}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \mu_1 &= l \mp \tfrac{1}{2} \\ \mu_2 = \ldots = \mu_{n-k} &= \tfrac{1}{2} \\ \mu_{n-k+1} &= \pm\tfrac{1}{2} \\ \mu_{n-k+2} = \ldots = \mu_n &= -\tfrac{1}{2} \\ \mu_{n+1} &= -\tfrac{n}{2} + k - l. \end{aligned} \tag{C.20}$$

Hier entspricht das obere Vorzeichen dem Wert $\varepsilon = +1$, und das untere $\varepsilon = 0$.

C.5. Berechnungen. Im vorigen Abschnitt wurden alle G–Darstellugen $\hat{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$ bestimmt, die zur Zerlegung (C.11) einen nicht–trivialen Beitrag liefern. Nach Satz C.3 hat man zur Bestimmung des Spektrums des Dirac–Operators den folgenden Ausdruck zu berechnen

$$\lambda(k) := \|\hat{\mu}_k + \delta_G\|^2 - \|\delta_G\|^2 = \|\hat{\mu}_k\|^2 + 2\langle \hat{\mu}_k, \delta_g \rangle. \tag{C.21}$$

Hierbei ist

$$
\begin{aligned}
\delta_G &= (\tfrac{n}{2}, \tfrac{n}{2}-1, \dots, \underbrace{\tfrac{n}{2}+1-j}_{(j)}, \dots, -\tfrac{n}{2}) \\
\hat{\mu}_k^{\pm} &= (l \mp \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}, \underbrace{\pm\tfrac{1}{2}}_{(n-k+1)}, -\tfrac{1}{2}, \dots, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{n}{2}+k-l).
\end{aligned}
$$

Für $(n+1)$–Vektoren entspricht das von der Spurform B_0 auf $\mathfrak{t}^*$ induzierte Skalarprodukt gerade dem euklidischen Skalarprodukt. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\lambda^{\pm}(k) \;=\; & (l \mp \tfrac{1}{2})^2 + n(l \mp \tfrac{1}{2}) + \sum_{j=2}^{n-k} ((\tfrac{n}{2}+1-j)+\tfrac{1}{4}) + \\
& + \tfrac{1}{4} \pm (\tfrac{n}{2}+1-n+k-1) - \sum_{j=n-k+2}^{n} (\tfrac{n}{2}+1-j) - \tfrac{1}{4}) + \\
& + (-\tfrac{n}{2}+k-l)^2 - 2(-\tfrac{n}{2}+k-l)\tfrac{n}{2}.
\end{aligned}
$$

Bemerkt man noch, daß

$$\sum_{j=2}^{n-k} ((\tfrac{n}{2}+1-j)+\tfrac{1}{4}) = (n-k-1)(\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{2}(n-k-1)(n-k)$$

und

$$\sum_{j=n-k+2}^{n} ((\tfrac{n}{2}+1-j)-\tfrac{1}{4}) = (k-1)(k-\tfrac{n}{2}-\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{2}(k-1)k,$$

so erhält man

$$\lambda^{\pm}(k) \;=\; 2l^2 + l(3n \mp 1 - 2k) - \tfrac{n^2}{4} - \tfrac{n}{4} + (n-k)(n \mp 1).$$

Da man die Längen der Wurzeln bezüglich des von der Killing–Form induzierten Skalarprodukts braucht, hat man den letzten Wert für $\lambda^{\pm}(k)$ noch zu skalieren. Es gilt $B_0 = \frac{1}{2(n+1)}B$ und folglich $\|\cdot\|_B^2 = \frac{1}{2(n+1)}\|\cdot\|_{B_0}^2$. Damit erhält man

$$\|\hat{\mu}_k^{\pm} + \delta_G\|_B^2 - \|\delta_G\|_B^2 \;=\; \tfrac{1}{2(n+1)}\lambda^{\pm}(k).$$

Das Spektrum des Quadrats des Dirac–Operators (bezüglich der von der Killing–Form induzierten Metrik) folgt jetzt aus Satz C.3. Es hat die folgende Form:

$$\tfrac{1}{2(n+1)}\lambda^{\pm}(k) + \tfrac{n}{8} = \tfrac{1}{8(n+1)}(8l^2 + 4l(3n-2k \mp 1) + 4(n-k)(n \mp 1)). \tag{C.22}$$

Das Spektrum von D^2 bezüglich der Fubini–Study–Metrik ist das $(n+1)$–fache des letzten Ausdrucks (C.22) und eine kleine Umformung liefert dann Theorem C.1.

Bemerkung. *Wie man aus den Rechnungen ersieht, entsprechen die Serien $\{\lambda_{l,k}\}$ bzw. $\{\mu_{l,k}\}$ dem Parameter $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = 0$, der bei der Beschreibung der Verzweigungsregeln eingeführt wurde.*

C.6. Der Dirac–Operator auf dem Unterbündel S_0. Das Spektrum des Dirac–Operators auf dem Unterbündel S_0 kann man unter Benutzung der Hopf-Faserung $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ auch direkt berechnen.
Die Hopf-Faserung ist ein S^1–Hauptfaserbündel, und man kann die dazu assoziierten Linienbündel $\mathcal{E}_m := S^{2n+1} \times_{\rho_m} \mathbb{C}$ betrachten. Dabei bezeichnet ρ_m die folgende S^1–Wirkung auf $\mathbb{C}$: $\rho_m(z)v := z^{-m}v$ $(z \in S^1$ und $v \in \mathbb{C})$. Es ist leicht zu sehen ([Kuw88]), daß $c_1(\mathcal{E}_m) = m$ gilt. Andererseits findet man, unter Berücksichtigung des Isomorphismus $S_0 \simeq K^{\frac{1}{2}}$

$$c_1(S_0) \;=\; c_1(K^{\frac{1}{2}}) \;=\; \tfrac{1}{2}c_1(K) \;=\; -\tfrac{1}{2}c_1(\mathbb{C}P^n) \;=\; -\tfrac{1}{2}(n+1).$$

Dabei bezeichnet K wieder das kanonische Bündel von $\mathbb{C}P^n$. Da die komplexen Linienbündel über $\mathbb{C}P^n$ durch ihre erste Chernklasse bestimmt sind, folgt

$$S_0 \;\simeq\; \mathcal{E}_{-\frac{n+1}{2}}.$$

Das Bündel S_0 ist als assoziiertes Bündel gegeben. Damit lassen sich die Schnitte in S_0 mit S^1–invarianten Funktionen auf S^{2n+1} identifizieren, d.h.

$$\Gamma(S_0) \;\simeq\; C^\infty(S^{2n+1}, \mathbb{C})^{S^1}. \tag{C.23}$$

Unter dieser Identifizierung entspricht der Bochner–Laplace–Operator $\nabla^*\nabla$ von S_0 der Differenz von Funktionen–Laplace–Operators Δ auf S^{2n+1} und Casimir–Operator der Darstellung $(\rho_m, \mathbb{C})$ für $m = -\frac{n+1}{2}$ ([BGV90], [Kuw88]). Dabei muß man noch bemerken, daß der vom Levi–Civita–Zusammenhang auf S_0 induzierte Zusammenhang gerade mit dem kanonischen hermiteschen Zusammenhang des holomorphen Linienbündels S_0 übereinstimmt. Es gilt also

$$\nabla^*\nabla \;=\; \Delta - \tfrac{m^2}{4}.$$

Andererseits hat man aber die Lichnerowicz–Formel für des Quadrat des Dirac–Operators

$$\mathrm{D}^2 \;=\; \nabla^*\nabla + \frac{R}{4}.$$

Dabei bezeichnet R die Skalarkrümmung. Der komplex–projektive Raum versehen mit der Fubini–Study–Metrik hat die Skalarkrümmung $R = n(n+1)$. Somit erhält man unter der Identifizierung (C.23)

$$\mathrm{D}^2 \;=\; \Delta - \tfrac{(n+1)^2}{16} + \tfrac{n(n+1)}{4}.$$

Das Spektrum von Δ auf S^{2n+1} ist bekannt. Die Eigenfunktionen können als die Einschränkung homogener Polynome realisiert werden ([BGM71]). Es ist leicht zu sehen, welche dieser Eigenfunktionen invariant unter der S^1–Wirkung $\rho_{-\frac{n+1}{2}}$ sind ([Kuw88]). Damit erhält man das Spektrum von Δ auf Funktionen in $C^\infty(S^{2n+1}, \mathbb{C})^{S^1}$ als die Menge

$$\{\lambda_l \;=\; (l + \tfrac{n+1}{4})(l + \tfrac{5n+1}{4}) \;:\; l = 0, 1, \ldots\}.$$

Daraus wiederum ergeben sich die Eigenwerte von D^2 auf Schnitten in S_0 als

$$\begin{aligned}
\mu_{l,0} &= (l + \tfrac{n+1}{4})(l + \tfrac{5n+1}{4}) - \tfrac{(n+1)^2}{16} + \tfrac{n(n+1)}{4} \\
&= l^2 + l(\tfrac{3}{4}n + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{n(n+1)}{2} \\
&= (l + \tfrac{n+1}{2})(l + \tfrac{n+1}{2} + \tfrac{n-1}{2}) \\
&= (l + \tfrac{n+1}{2})(l + n).
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Die obige Rechnung ist analog möglich für S_n. Man erhält dieselben Eigenwerte von D^2 auf S_n. Das ersieht man auch aus der Beziehung $\lambda_{l,n} = \mu_{l-\frac{n+1}{2},0}$, $l \geq \frac{n+1}{2}$ (vgl. (5)).

Anhang D. Das Klassifikationsresultat von A. Moroianu

In der Arbeit [Mor94] beweist A. Moroianu das folgende Theorem:

Theorem D.1. *Sei (M^{2m}, g, J) eine kompakte Kählersche Spin–Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung und ungerader komplexer Dimension $(m = 2k + 1)$, auf der Kählersche Killingspinoren existieren. Dann ist M der Twistorraum einer quaternionisch–Kählersche Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung.*
Insbesondere ist M isomorph zum komplex–projektiven Raum, falls $k \equiv 0(2)$ gilt.

Zum Beweis dieses Theorems betrachtet er die maximale Wurzel $U(M)$ aus dem kanonischen Bündel K der Mannigfaltigkeit M (im Sinne von Satz 3.7). Diese Mannigfaltigkeit ist eine einfach zusammenhängende Spin–Mannigfaltigkeit. Weiter besitzt $U(M)$ eine Einstein–Sasaki–Struktur, und insbesondere existiert auf M ein reeller Killing–Spinor (siehe auch [FK90]).

Als nächstes identifiziert er das Spinorbündel von $U(M)$ mit dem mittels der Projektion $\pi : U(M) \longrightarrow M$ zurückgezogenen Spinorbündel von M. Es lassen sich Formeln beweisen, die einen Zusammenhang zwischen den kovarianten Ableitungen der entsprechenden Spinorbündel herstellen. Damit kann er dann die Gleichungen auf M, die einen Kählerschen Killing–Spinor beschreiben in Gleichungen für einen Killing–Spinor auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit $U(M)$ übersetzen.

Dieser Killing–Spinor ist verschieden von dem, der nach [FK90] auf $U(M)$ existieren muß. Die Klassifikation von Ch. Bär (siehe [Bär93]) liefert jetzt, daß $U(M)$ eine Sasaki–3–Struktur besitzt. Die Projektion dieser Struktur auf M induziert dort eine integrable und reguläre Distribution. Die Integralmannigfaltigkeiten sind Sphären S^2 und aus [BGM93] folgt schließlich, daß M der Twistorraum einer quaternionisch–Kählerschen Mannigfaltigkeit ist.

Mit diesem Resultat von A. Moroianu ergeben sich zwei Konsequenzen aus der vorliegenden Arbeit.

Folgerung 1. *Sei (M^{2m}, g, J) eine kompakte Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung und $m = 2k+1$ (k ungerade). Existiert auf M eine komplexe Kontaktstruktur, so ist M der Twistorraum einer quaternionisch–Kählerschen Mannigfaltigkeit .*

Folgerung 2. *Sei (M^{2m}, g, J) eine kompakte Kähler–Einstein–Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung und sei r eine ungerade Zahl derart, daß auch $\frac{m-r}{r+1}$ ungerade ist. Existiert dann auf M eine komplexe r–Kontaktstruktur, so ist M auch eine komplexe Kontaktmannigfaltigkeit (im gewöhnlichem Sinne).*

Anhang E. Der Rarita–Schwinger–Operator

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Eigenschaften des Rarita–Schwinger–Operators zusammengestellt werden. Zum Teil sind die hier angeführten Fakten schon in den Arbeiten [Sem90] bzw. [Wan91] enthalten.

E.1. Definition und Eigenschaften. Sei (M^n, g) eine Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit mit Spinorbündel S. Dann ist der mit dem komplexifizierten Kotangentialbündel $T^*_{\mathbb{C}}M$ getwistete Dirac–Operator D_T wie üblich als Komposition folgender Abbildungen definiert:

$$\Gamma(S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M \otimes TM^*) \xrightarrow{\mu\otimes 1} \Gamma(S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M).$$

Dabei steht ∇ für die kovariante Ableitung $\nabla^S \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^T$, und ∇^S bzw. ∇^T bezeichnen die vom Levi–Civita–Zusammenhang induzierten kovarianten Ableitungen. Weiter bezeichnet μ die Clifford–Multiplikation, d.h. $\mu : \Gamma(S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M) \longrightarrow \Gamma(S)$.

Schnitte in $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$ werden jetzt als spinorwertige 1–Formen aufgefaßt. Fixiert man eine lokale orthonormale Basis $\{s_i\}_{i=1,\dots,n}$, so schreibt sich die Clifford–Multiplikation als $\mu(\psi) = \sum_{i=1}^n s_i \cdot \psi(s_i)$. Für den Operator D_T erhält man folgende lokale Form:

$$D_T(\phi \otimes \omega) = D\phi \otimes \omega + \sum_{i=1}^n s_i \cdot \phi \otimes \nabla_{s_i}\omega.$$

Dabei D den Dirac–Operator bezeichnet und $\phi \in \Gamma(S)$, $\omega \in \Gamma(T^*_{\mathbb{C}}M)$.

Der so definierte Differentialoperator D_T ist, genau wie der Dirac–Operator, ein elliptischer Differentialoperator erster Ordnung und hat somit auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein diskretes Spektrum.

Sei $P \longrightarrow M$ das $Spin(n)$–Hauptfaserbündel der Spinstruktur von (M, g). Dann schreibt sich $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$ als zu P assoziiertes Vektorbündel $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M = P \times_{Spin(n)} (\Delta \otimes \Lambda^1)$. Dabei ist Δ der Spinormodul und Λ^1 die n–dimensionale Standarddarstellung von $Spin(n)$. Erste Eigenschaften des Operators D_T ergeben sich aus der Darstellungstheorie der kompakten Lieschen Gruppe $Spin(n)$.

Die irreduziblen Darstellungen zusammenhängender kompakter Liescher Gruppen sind eindeutig durch ihr höchstes Gewicht charakterisiert. Somit bezeichne V_γ die irreduzible $Spin(n)$–Darstellung zum höchsten Gewicht γ. Für $n = 2m+1$ sei ∂_n das höchste Gewicht des Spinormuduls Δ_n. Für $n = 2m$ hat man $\Delta_n = \Delta_n^+ \oplus \Delta_n^-$, und $\partial_n^\pm$ seien die höchsten Gewichte der irreduziblen Komponenten $\Delta_n^\pm$. Weiter sei λ_1 das höchste Gewicht von Λ^1.

Sei $l := [n/2]$, so sind die irreduziblen $Spin(n)$–Darstellungen parametrisiert durch Vektoren $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ in $\mathbb{Z}^l$ oder $(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})^l$, die den folgenden Ungleichungen genügen:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 0, && \text{für } n \text{ ungerade},\\ &\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{l-1} \geq |\lambda_l|, && \text{für } n \text{ gerade}. \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen findet man

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (1,0,\ldots,0), \\
\partial_n &= \tfrac{1}{2}(1,\ldots,1), \\
\partial_n^{\pm} &= \tfrac{1}{2}(1,\ldots,\pm 1), \\
\gamma &:= \lambda_1 + \partial_n = \tfrac{1}{2}(3,1,\ldots,1), \\
\gamma^{\pm} &:= \lambda_1 + \partial_n^{\pm} = \tfrac{1}{2}(3,1,\ldots,\pm 1).
\end{aligned}$$

Das nächste Lemma liefert die darstellungstheoretische Grundlage für die Definition des Rarita–Schwinger–Operators.

Lemma E.1. *Man hat folgende Zerlegung von $Spin(n)$–Darstellungen ($n = 2m, n = 2m+1$) in irreduzible Komponenten:*

$$\begin{aligned}
a.)\quad & \Delta_n \otimes \Lambda^1 \cong \Delta_n \oplus V_\gamma \\
& \textit{für} \quad n = 2m+1, \quad \gamma = \lambda_1 + \partial_n \\
b.)\quad & \Delta_n^{\pm} \otimes \Lambda^1 \cong \Delta_n^{\mp} \oplus V_{\gamma^\pm} \\
& \textit{für} \quad n = 2m, \quad \gamma^{\pm} = \lambda_1 + \partial_n^{\pm}.
\end{aligned}$$

Die Summanden V_γ bzw. $V_{\gamma^+} \oplus V_{\gamma^-}$ sind isomorph zum Kern der Clifford–Multiplikation. Außerdem gilt in der Dimension 4 die Isomorphie

$$V_{\gamma^\pm} \cong \Lambda^2_{\pm} \otimes \Delta_{\mp}.$$

Dabei bezeichnet $\Lambda^2_{\pm}$ die selbst– bzw. antiselbstdualen 2 –Formen $\Lambda^2 \cong \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$.

Beweis. Der Beweis des Lemmas sei hier nur kurz skizziert (siehe [Sem90]).
Zuerst sieht man, daß in der Zerlegung des Tensorprodukts $\Delta \otimes \Lambda^1$ in irreduzible Komponenten die Darstellung V_γ zum höchsten Gewicht $\gamma = \lambda_1 + \partial_n$ vorkommen muß. Weiter liefert die Clifford–Multiplikation eine äquivariante Einbettung $i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_n \otimes \Lambda^1$, definiert durch

$$i(\phi) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \phi \otimes e_i,$$

wobei $\phi \in \Delta_n$ und $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ eine orthonormale Basis in Λ^1 ist. Die Behauptung folgt dann aus der Weylschen Dimensionsformel, da $\dim(\Delta_n \otimes \Lambda^1) = \dim V_\gamma + \dim \Delta_n$ gilt. □

Die Zerlegung von $Spin(n)$–Darstellungen (nach Lemma E.1) induziert eine globale Zerlegung des Vektorbündels $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$. Das zur Darstellung V_γ ($\gamma = (3/2, 1/2, \ldots, 1/2)$) assoziierte Vektorbündel wird als $S_{3/2}$ bezeichnet. Es ist isomorph zum Kern der Clifford–Multiplikation in $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$. Analog definiert man $S^{\pm}_{3/2}$.

Folgerung E.2. *Das Tensorprodukt $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$ zerfällt folgendermaßen in eine direkte Summe von Unterbündeln:*

$$(1) \quad S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M \cong S \oplus S_{3/2} \qquad \text{für} \quad n = 2m+1$$

$$(2) \quad S^{\pm} \otimes T^*_{\mathbb{C}}M \cong S^{\mp} \oplus S^{\pm}_{3/2} \qquad \text{für} \quad n = 2m.$$

Die Einbettung $i : S \longrightarrow S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$ ist gegeben durch $i(\phi)(X) = -1/n\, X \cdot \phi$ mit $X \in \Gamma(TM^{\mathbb{C}})$. Für die Projektionen auf die Summanden $i(S)$ bzw. $\ker(\mu) \cong S_{3/2}$ folgt damit

$$p_1 := i \circ \mu \qquad \text{bzw.} \qquad p_2 := 1 - i \circ \mu.$$

Um D_T bezüglich der Zerlegung aus Lemma E.2 zu beschreiben, seien noch zwei Operatoren eingeführt. Zum einen der Twistor–Operator $\mathcal{D}$, der (komplementär zum Dirac–Operator) als Projektion von $\nabla\phi$ auf den Kern der Clifford–Multiplikation definiert ist, d.h.

$$\mathcal{D}(\phi) := p_2(\nabla\phi) = \nabla\phi - i \circ \mu(\nabla\phi).$$

Zum anderen bezeichne δ den zur kovarianten Ableitung adjungierten Operator, d.h. $\delta : \Gamma(S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M) \longrightarrow \Gamma(S)$ und $\delta\psi = -\sum_{i=1}^{n} (\nabla_i \psi)(s_i)$. Das nächste Lemma folgt aus einer leichten Rechnung und den Definitionen.

Lemma E.3. *Sei (M,g) eine geschlossene Spin–Mannigfaltigkeit, dann ist δ der formal–adjungierte Operator des Twistor–Operators.*

Satz E.4. *Der Operator D_T hat bezüglich der Zerlegung $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M = i(S) \oplus \ker(\mu)$ die folgende Matrixgestalt:*

$$D_T = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n}\, i \circ D \circ i^{-1} & 2i \circ \delta \\ \frac{2}{n}\mathcal{D} \circ i^{-1} & D_{3/2} \end{pmatrix}.$$

Dabei steht $D_{3/2}$ für $p_2 \circ D_T \circ p_2$.

Beweis. Zu nächst beweist man die folgende zwei Aussagen, die sich beide aus direkten Rechnungen ergeben:

$$(1) \quad D_T(i(\phi)) = \frac{2-n}{n}\, i \circ (D\phi) + \frac{2}{n}\, \mathcal{D}(\phi)$$

$$(2) \quad p_1(D_T \psi) = 2\, i \circ \delta(\psi)\,.$$

Da das Bild des Twistor–Operators nach Definition im Kern der Clifford–Multiplikation liegt, d.h. in $S_{3/2}$, ist der Beweis damit beendet.

□

Bemerkung. *Der Operator $D_{3/2}$, d.h. die Projektion von D_T auf $S_{3/2}$, wird in der Physik als Rarita–Schwinger–Operator bezeichnet. Insbesondere sieht man*
$D_{3/2}\,\psi \;=\; D_T\;\psi$ *für* $\psi \in \Gamma(S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M)$ *mit* $\mu(\psi) = 0 = \delta(\psi)$.

Der nächste Satz verdeutlicht, daß Einstein–Mannigfaltigkeiten eine besondere Bedeutung bei der Untersuchung des Rarita–Schwinger–Operators haben. Sein Beweis ergibt sich aus lokalen Rechnungen unter Ausnutzung der entsprechenden Definitionen (siehe z.B. [Sem90]).

Satz E.5. *Der Operator D_T^2 erhält die Aufspaltung $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M = i(S) \oplus ker(\mu)$ genau dann, wenn (M, g) ein Einstein–Raum ist. Genauer gilt*

$$D_T^2(i(\phi)) \quad = \quad \left(i(D^2\phi) - \frac{R}{n}\, i(\phi)\right) \quad + \quad \frac{1}{n}\left(Ric(.) - \frac{R}{n}\, Id_{TM}\right)\cdot\phi.$$

Dabei ist Ric(.) *der Ricci–Tensor der Riemannschen Metrik, betrachtet als Endomorphismus in TM. Der erste Summand liegt in $i(S)$ und der zweite, interpretiert als spinorwertige 1–Form, entsprechend in $S_{3/2}$.*

Benutzt man die Formel für $D_T(i(\phi))$ aus Satz E.4 zusammen mit Satz E.5, so erhält man noch einen Ausdruck für D_T auf dem Bild des Twistor–Operators.

Satz E.6.

$$D_T\,(\mathcal{D}\phi) \;=\; \left(\tfrac{2(n-1)}{n} i(D^2\phi) - \tfrac{R}{2}\, i(\phi)\right) + \left(\tfrac{n-2}{n}\mathcal{D}(D\phi) + \tfrac{1}{2}(Ric - \tfrac{R}{n}\, Id)\,\phi\right).$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer liegt in $i(S)$ und der in der zweiten in $S_{3/2}$.

E.2. Spezielle Schnitte in $S_{3/2}$. Sei $\phi \in \Gamma(S)$ ein beliebiges Spinorfeld, dann definieren $i(\phi)$ bzw. $\mathcal{D}\phi$ Schnitte in $i(S)$ bzw. $S_{3/2}$, und mit den letzten beiden Sätzen kennt man die Wirkung des Rarita–Schwinger–Operators auf diesen Schnitten.
Die Konstruktion weiterer Schnitte im Bündel $S_{3/2}$, insbesondere solcher, die orthogonal zum Bild des Twistor–Operators sind, scheint ohne spezielle Voraussetzungen an die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit nicht möglich zu sein.
Eine solche spezielle Voraussetzung ist die Existenz von Killing–Spinoren. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man mit deren Hilfe Schnitte in $S_{3/2}$ konstruieren kann (siehe [Wan91]).

Sei (M^n, g) eine Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit mit einem Killing–Spinor σ. Das heißt der Spinor σ erfüllt für beliebige Vektorfelder X die Differentialgleichung $\nabla_X\sigma = \mu\, X\cdot\sigma$. Die Zahl μ wird dabei als Killing–Zahl bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung ist (M^n, g) eine Einstein–Mannigfaltigkeit der Skalarkrümmung $R = 4\,\mu^2\, n(n-1)$ (siehe [BFGK90]).

Sei $\beta \in \mathrm{End}(TM)$ ein fixierter g–symmetrischer Endomorphismus, dann definiert man einen Schnitt $\Psi^{(\beta,\sigma)} \in \Gamma(S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M)$ durch

$$\Psi^{(\beta,\sigma)}(X) \quad := \quad \beta(X) \cdot \sigma. \tag{E.1}$$

Zur Beschreibung dieser Schnitte wird der Differential–Operator $\delta^\nabla : TM^* \otimes TM \to TM$ benutzt. Dieser ist definiert als der formal adjungierte Operator zum kovarianten Differential $d^\nabla : TM \to TM^* \otimes TM$, d.h. $\delta^\nabla(\beta) = \sum_{i=1}^n \nabla_i \beta(e_i)$.

Lemma E.7. *Sei $\beta \in \mathrm{End}(TM)$ ein g–symmetrischer Endomorphismus mit $\mathrm{Tr}(\beta) = 0$ und $\delta^\nabla(\beta) = 0$. Dann ist $\Psi^{(\beta,\sigma)}$ ein Schnitt in $S_{3/2}$, der im Komplement zum Bild des Twistor–Operators liegt. Genauer gilt*

(1) $\quad \mu(\Psi^{(\beta,\sigma)}) \;=\; -\,\mathrm{Tr}(\beta)\,\sigma.$

(2) $\quad \delta(\Psi^{(\beta,\sigma)}) \;=\; -\,\delta^\nabla(\beta)\,\sigma \;-\; \mu\;\mathrm{Tr}(\beta)\,\sigma.$

Beweis. Die Clifford–Multiplikation μ ist definiert durch $\mu(\psi) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \psi(e_i)$. Damit folgt

$$\mu(\Psi^{(\beta,\sigma)}) \;=\; \sum_{i=1}^n e_i \cdot \beta(e_i) \cdot \sigma \;=\; \sum_{i,j} \beta_i^j\, e_i \cdot e_j \cdot \sigma \;=\; -\,\mathrm{Tr}(\beta)\,\sigma.$$

Zum Beweis der zweiten Gleichung sei daran erinnert, daß δ definiert war durch $\delta\psi = -\,\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}\psi)(e_i)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta(\Psi^{(\beta,\sigma)}) \;&=\; -\,\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}(\beta(e_i) \cdot \sigma) \\
&=\; -\,\sum_{i=1}^n (\nabla_i\beta)(e_i) \cdot \sigma) \;+\; \beta(e_i) \cdot \nabla_{e_i}\sigma \\
&=\; -\,\delta^\nabla(\beta) \;+\; \mu \sum_{i,j} \beta_i^j e_j \cdot e_i \cdot \sigma \\
&=\; -\,\delta^\nabla(\beta) \;-\; \mu\;\mathrm{Tr}(\beta)\,\sigma.
\end{aligned}$$

□

Die Spinoren $\Psi^{(\beta,\sigma)}$ wurden in der Arbeit [Wan91] zur Untersuchung der Deformationen von Einstein–Metriken eingeführt. In diesem Zusammenhang ergibt sich eine natürliche Verbindung zwischen dem Rarita–Schwinger–Operator und dem Lichnerowicz–Laplace–Operator Δ_L, mit dessen Hilfe sich der Raum der infinitesimalen Deformationen von Einstein–Metriken beschreiben läßt (siehe [Bes88], Kapitel 12).

Auf Endomorphismen $\beta \in \mathrm{End}(TM)$ ist der Operator Δ_L folgendermaßen definiert:

$$\Delta_L\beta \quad := \quad \nabla^*\nabla\beta \;-\; 2R^\circ(\beta) \;+\; \tfrac{2R}{n}\,\beta.$$

Dabei ist der Endomorphismus $R^\circ(\beta)$ gegeben durch die Gleichung $g(R^\circ(\beta)(X), Y) = -\sum_{i=1}^n g(\beta(R(X, e_i)Y), e_i)$.

Für das weitere ist der folgende Satz interesant:

Satz E.8. *Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit mit einem Killing–Spinor σ zur Killing–Zahl μ, und sei β ein g–symmetrischer Endomorphismus mit* $\mathrm{Tr}(\beta) = 0$ *und $\delta^\nabla \beta = 0$. Dann gilt*

$$(D_T - \mu)^2\,\Psi^{(\beta,\sigma)} \quad = \quad \mu^2\,(n^2 - 10n + 9)\,\Psi^{(\beta,\sigma)} \;+\; \Delta_L \beta\,\sigma.$$

Dabei wird der Summand $\Delta_L \beta\,\sigma$ wieder als spinorwertige 1–Form interpretiert.

Beweis. Sei $\Psi = \Psi^{(\beta,\sigma)}$ die oben definierte spinorwertige 1–Form, dann gilt

$$\begin{aligned} D_T \Psi(e_i) &= \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}(\beta(e_j) \cdot \sigma) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (e_i \cdot \nabla_{e_i}(\beta(e_j) \cdot \sigma \;+\; \mu e_i \cdot \beta(e_j) \cdot e_i \cdot \sigma) \\ &= \theta(e_j) \;+\; \mu(n-2)\Psi(e_j), \end{aligned}$$

wobei θ definiert ist durch $\theta(X) = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}(\beta(e_j) \cdot \sigma)$. Man erhält also die Gleichung

$$D_T \Psi \quad = \quad \mu(n-2)\Psi \;+\; \theta. \tag{E.2}$$

Eine etwas längere Rechnung (siehe [Wan91], Prop. 2.4.) liefert einen Ausdruck für $D_T \theta$. Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt

$$D_T \theta \quad = \quad \Delta_L(\beta) \;+\; \mu(4-n)\theta \;-\; 4\mu^2 n \Psi. \tag{E.3}$$

Aus den beiden Gleichungen (E.2) und (E.3) erhält man dann unmittelbar die Behauptung des Satzes. □

Aus Satz E.8 folgt also, daß die Schnitte $\Psi^{(\beta,\sigma)} \in \Gamma(S_{3/2})$, nach geeigneter Wahl von β, Eigenschnitte des Rarita–Schwinger–Operators sind. Eine Anwendung dieser Eigenschaft enthält der Abschnitt E.4.

E.3. Aussagen zum Spektrum von D_T. Ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis von Eigenwertabschätzungen ist die folgende Weitzenböck–Formel, deren Beweis sich leicht aus einer lokalen Rechnung ergibt (siehe [Sem90] oder [Wan91]).

Satz E.9. *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit mit Skalarkrümmung R. Dann gilt*

$$(D_T^2 \psi)(X) \quad = \quad (\nabla^* \nabla)(\psi)(X) \;+\; \tfrac{R}{4}\,\psi(X) \;+\; 2\sum_{i=1}^{n} R^S_{s_i, X}(\psi(s_i)).$$

Dabei ist $R^S_{X,Y}$ der Krümmungstensor des Spinorbündels und X ein beliebiges Vektorfeld.

Der dritte Summand in der letzten Formel definiert einen Endomorphismus Q des Vektorbündels $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$, d.h.

$$(Q\psi)(X): \quad = \quad 2\sum_{i=1}^{n} R^S_{s_i,X}(\psi(s_i))$$

oder, in anderer Form, indem man $R^S_{s_i,X}$ mit Hilfe der Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors ausdrückt

$$Q\,\psi \;=\; \sum_{\substack{k,l\\ i<j}} s_i \cdot s_j \cdot \psi(s_k) \otimes R_{ijkl}\, s_l. \tag{E.4}$$

Aus dieser Weitzenböck–Formel und einigen Standardumformungen erhält man folgende Abschätzung für den kleinsten Eigenwert λ_0 des Operators D_T^2 (siehe [Bau93] oder [Hen84]).

Satz E.10. *Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung R, mit $R \not\equiv 0$ und $R_0 := \min(R)$. Dann gilt*

$$\lambda_0 \quad \geq \quad \frac{n}{n-1}\left(\frac{R_0}{4} + \mu_0\right),$$

wobei μ_0 den kleinsten Eigenwert des Endomorphismus Q bezeichnet.

Um diesen Satz anwenden zu können, muß man also eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert von Q finden. Dazu soll der Endomorphismus Q im Abschnitt E.6 genauer untersucht werden. Es wird dort eine Ungleichung bewiesen, die μ_0 mit Hilfe des kleinsten Eigenwertes des Krümmungsendomorphismus abschätzt.

Geht man von Eigenspinoren des Dirac–Operators aus, so kann man spezielle Eigenschnitte des Rarita–Schwinger–Operators konstruieren. Dazu benutzt man die Sätze E.5 und E.6, die den Operator D_T^2 auf Schnitten in $i(S)$ bzw. auf dem Bild des Twistor–Operators beschreiben.

Satz E.11. *Sei (M,g) ein kompakter Einstein–Raum und sei ϕ ein Eigenspinor des Dirac-Operators, d.h. $D\phi = \mu\phi$. Dann gilt*

(1) $\quad D_T^2(i(\phi)) \quad = \quad (\mu^2 - R/n)\, i(\phi)\,,$

(2) $\quad D_T^2(\mathcal{D}(\phi)) \quad = \quad (\mu^2 - R/n)\, \mathcal{D}(\phi).$

Falls ϕ ein Killing–Spinor ist, gilt $\mathcal{D}(\phi) = 0$ und man erhält in diesem Fall keinen Eigenschnitt des Operators D_T.

Bemerkung. *Sei (M,g) ein kompakter Einstein–Raum und sei ϕ ein Spinor mit $D_T^2 i(\phi) = \lambda^2 i(\phi)$. Setzt man $\psi := D_T i(\phi) + \lambda i(\phi)$, so gilt $D_T\psi = \lambda\psi$ und $p_2(\psi) = 2/n\mathcal{D}\phi$, d.h. $D_T^2(\mathcal{D}\phi) = \lambda^2(\mathcal{D}\phi)$.*

Der nächste Satz ergibt sich völlig analog zum Satz E.11 aus den angegebenen Eigenschaften des Operators D_T (siehe [Wan91]).

Satz E.12. *Sei (M,g) ein kompakter Einstein–Raum und $\psi \neq 0$ eine spinorwertige 1-Form mit $D_T\,\psi = \lambda\psi$, dann sind folgende zwei Fälle möglich:*

(1) *Sei $\mu(\psi) = \sigma \neq 0$. Dann gilt $D^2\sigma = (\lambda^2 + R/n)\,\sigma$ und somit $\lambda^2 \geq n/(n-1)\,R/4 - R/n$. Gleichheit gilt genau dann, wenn die Mannigfaltigkeit (M,g) einen Killing–Spinor zuläßt. Schreibt man $\psi = i(\sigma) + \widetilde{\psi}$ mit $\widetilde{\psi} = p_2(\psi) \in S_{3/2}$, dann folgt $D^2\sigma = \lambda^2\sigma$ und $D_T^2\widetilde{\psi} = \lambda^2\widetilde{\psi}$.*

(2) *Sei $\mu(\psi) = 0$. Dann folgt $\delta\psi = 0$, d.h. ψ liegt im Komplement zum Bild des Twistor–Operators in $S_{3/2}$.*

Folgerung E.13. *Sei (M^n,g) ($n > 2$) ein kompakter Einstein–Raum positiver Skalarkrümmung und $\psi \neq 0$ eine spinorwertige 1-Form im Kern des Operators D_T. Dann gilt $\delta\psi = 0$.*

Nach dem bisher Gesagten ist also der Operator D_T vollständig bekannt auf dem Teil $i(S) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{D})$. Sein Spektrum ergibt sich dort aus dem des gewöhnlichen Dirac–Operators durch Verschiebung um $\frac{R}{n}$. Interessant sind daher Aussagen über D_T auf dem orthogonalen Komplement von $\mathrm{im}(\mathcal{D})$ im Kern der Clifford-Multiplikation, d.h. auf $\ker\delta \subset \ker\mu$.

E.4. Der Rarita–Schwinger–Operator auf der Sphäre S^n . Die Sphäre S^n ist eine Mannigfaltigkeit, auf der sich das Spektrum des Rarita–Schwinger–Operators explizit angeben läßt. Dazu betrachtet man $S^n = Spin(n+1)/Spin(n)$ als symmetrischen Raum und benutzt die Standardmethoden zur Berechnung des Spektrums (siehe [Sem90], vgl. auch Anhang E.5).

Man erhält die folgende Aufspaltung der Räume $\Gamma(S_{3/2})$ bzw. $\Gamma(S^{\pm}_{3/2})$ in Eigenräume des Rarita–Schwinger–Operators

$$\Gamma(S_{3/2}) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} (Z_j^+ \oplus Z_j^-) \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} (U_j^+ \oplus U_j^-)$$

$$\Gamma(S^{\pm}_{3/2}) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} Z_j^{\pm} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} U_j^{\pm}.$$

Dabei sind $U_j^{\pm}$ und $Z_j^{\pm}$ die irreduziblen $Spin(n{+}1)$–Darstellungen, die als $Spin(n)$–Darstellung betrachtet in eine Summe irreduzibler Komponenten zerfallen, unter denen der Spinormodul Δ vorkommt.

Die Wirkung des Rarita–Schwinger–Operators läßt sich mit Hilfe des Casimir–Operators der Gruppe $Spin(n+1)$ ausdrücken. Fixiert man die Metrik g, die von $\frac{1}{2(n-1)}\,B$ induziert wird, wobei B die Killing–Form von $Spin(n+1)$ bezeichnet, so erhält man

- $U_j^{\pm}$ ist Eigenraum des Operators D_T^2 zum Eigenwert $(j+\frac{n}{2})^2$,

- $Z_j^{\pm}$ ist Eigenraum des Operators D_T^2 zum Eigenwert $(j+\frac{n}{2})^2 - \frac{n-1}{2}$.

Die Zahlen $(j+\frac{n}{2})^2, j=0,1,\dots$ bilden das Spektrum des Dirac–Operators auf der Sphäre (S^n,g). Da S^n bezüglich der Metrik g die Skalarkrümmung $R=n(n-1)$ hat, liefern die Eigenwerte $(j+\frac{n}{2})^2 - \frac{n-1}{2}$, $j=1,2,\dots$ genau den durch Satz E.11 bestimmten Teil des Spektrums. (Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Eigenspinoren zum Eigenwert $\frac{n}{2}^2$ Killing–Spinoren sind und somit $j=0$ hier ausgeschlossen ist)

Unter Benutzung von Satz E.8 lassen sich auch die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $(j+\frac{n}{2})^2$, $j=1,2,\dots$ konkret angeben. Dazu realisiert man die symmetrischen 2–Tensoren $S^2(S^n)$ als homogenes Vektorbündel, d.h. $S^2(S^n)=SO(n+1)\times_{SO(n)} S^2(\mathbb{C}^n)$, wobei $S^2(\mathbb{C}^n)$ die symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

Lemma E.14. *Die $SO(n)$–Darstellung $S^2(\mathbb{C}^n)$ zerfällt in zwei irreduzible Komponenten. Es gilt*

$$S^2(\mathbb{C}^n) \quad = \quad \mathbb{C}^n \oplus S_0^2(\mathbb{C}^n).$$

Dabei ist $S_0^2(\mathbb{C}^n)=V_{2\lambda_1}$ der Unterraum der spurlosen Bilinearformen und $\mathbb{C}^n=V_{\lambda_1}$ mit $\lambda_1=(1,0,\dots,0)$.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma E.1, d.h. man gibt eine konkrete Realisierung der Zerlegung an und beweist mit Hilfe der Weylschen Dimensionsformel, daß die irreduziblen Summanden $V_{2\lambda_1}$ und V_{λ_1} den ganzen Raum $S^2(\mathbb{C}^n)$ aufspannen. □

Die Frobenius–Reziprozität liefert die folgende Zerlegung der L^2–Schnitte in $S_0^2(S^n)$:

$$L^2(S_0^2(S^n)) \quad = \quad \oplus_{j\in \widehat{SO(n+1)}} V_j \otimes \mathrm{Hom}_{SO(n)}(V_j, V_{2\lambda_1}). \tag{E.5}$$

Die Verzweigungsregeln bestimmen die irreduziblen $SO(n+1)$–Darstellungen j, für die $\mathrm{Hom}_{SO(n)}(V_j,V_{2\lambda_1})\neq\emptyset$ gilt. Im Fall der Gruppen $SO(m)$ sind diese besonders einfach zu beschreiben. Sei $n=2m$, dann werden die irreduziblen Darstellungen von $SO(n+1)$ und $SO(n)$ durch m–Vektoren parametrisiert. V_j zerfällt als $SO(n)$–Darstellung betrachtet in irreduzible Komponenten V_k mit $k=(k_1,\dots,k_m)$ und

$$j_1 \geq k_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_m \geq |k_m|,$$

wobei $j=(j_1,\dots,j_m)$. Für $n=2m+1$ gelten ähnliche Ungleichungen. Wendet man diese Regel auf den vorliegenden Fall $j=2\lambda_1=(2,0,\dots,0)$ an, so erhält man die folgenden drei Serien, die einen Beitrag zur Zerlegung (E.5) liefern:

$$j_l^1=(k,0,\dots,0),\quad j_l^2=(k,1,0,\dots,0),\quad j_l^3=(k,2,0,\dots,0),$$

für $l=2,3,\dots$.

Aus der Arbeit [Bra90] folgt, daß die Summanden $V_{j_l^3}$ gerade dem Kern des Operators δ^{∇} entsprechen, und daß die Wirkung des Lichnerowicz–Laplace–Operators auf Schnitten in $S^2(S^n)$ mit der des Casimir–Operators von $SO(n+1)$ übereinstimmt (vgl. auch [Koi80]).

Der Casimir–Operator wirkt auf V_j als Multiplikation mit $\|j+\delta_{SO(n+1)}\|^2 - \|\delta_{SO(n+1}\|^2$. Dabei bezeichnet $\delta_{SO(n+1}$ die halbe Summe der positiven Wurzeln von $\mathfrak{so}(n+1)$ (für $n = 2m$ gilt $2\,\delta_{SO(n+1} = (n-1, n-3, \ldots, 1))$, und $\|\cdot\|$ steht für die von der Killing–Form auf den Wurzeln induzierte Norm. Skaliert man die Killing–Form mit dem Faktor $2(n-1)$, so entspricht $\|\cdot\|$ der gewöhnlichen euklidischen Norm.

Damit bilden die Summanden $V_{j_l^3}$ die Eigenräume des Operators Δ_L zu den Eigenwerten $d_l = l^2 + 3l + ln + 4n$, für $l = 0, 1, \ldots$.

Auf der Sphäre (S^n, g) existieren $2^{[n/2]}$ Killing–Spinoren zur Killing–Zahl $-\frac{1}{2}$. Sei σ einer dieser Killing–Spinoren, und β_l ein Eigenvektor des Operators Δ_L zum Eigenwert d_l. Dann folgt aus Satz E.8

$$(D_T + \tfrac{1}{2})^2\, \Psi^{\beta_l,\sigma} \quad = \quad \tfrac{1}{4}\,(n + 2l + 3)^2 \Psi^{\beta_l,\sigma}.$$

Die spinorwertigen 1–Formen $\Psi^{\beta_l,\sigma}$ sind also Eigenvektoren des Operators D_T^2 zu den Eigenwerten $(j + \frac{n}{2})^2$, für $j = 1, 2, \ldots$.

E.5. Der Rarita–Schwinger–Operator auf $\mathbb{C}P^{2m-1}$. Mit den Methoden des Anhangs C kann man auch das Spektrum des Rarita–Schwinger–Operators auf dem komplex–projektiven Raum berechnen. Da die Rechnungen völlig analog verlaufen, sollen hier nur die wichtigsten Punkte angegeben werden, wobei die schon eingeführten Bezeichnungen benutzt werden.

Als Bündel über $\mathbb{C}P^{2m-1}$ betrachtet man jetzt das Tensorprodukt $S \otimes TM^{\mathbb{C}}$, das sich als homogenes Vektorbündel $G \times_K (\Delta \otimes \Lambda^1)$ schreiben läßt. Dabei ist $G = SU(n+1)$ und $K = S(U(n) \times U(1))$.

Die K–Darstellungen Δ und Λ^1 zerfallen in irreduzible Komponenten $\Delta = \oplus_{k=0}^n \Delta_k$ bzw. $\Lambda^1 = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$. Entsprechend zerfällt auch das Tensorprodukt $\Delta \otimes \Lambda^1$ in irreduzible Komponenten. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta \otimes \Lambda^1 \quad &= \quad \bigoplus_{k=0}^{n} (\Delta_k \otimes \Lambda^{1,0}) \ \oplus \ \bigoplus_{k=0}^{n} (\Delta_k \otimes \Lambda^{0,1}) \\ &= \quad \bigoplus_{k=0}^{n} (\Delta_{k+1} \oplus E_k^+) \ \oplus \ \bigoplus_{k=0}^{n} (\Delta_{k-1} \oplus E_k^-). \end{aligned}$$

Dabei sind E_k^+ bzw. E_k^- die irreduziblen Komponenten, deren höchste Gewichte gerade die Summe der höchsten Gewichte von Δ_k und $\Lambda^{1,0}$ bzw. Δ_k und $\Lambda^{0,1}$ sind. Diese Gewichte seien mit $\varepsilon_k^{\pm}$ bezeichnet. Man findet

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^+ \quad &= \quad \big(\tfrac{n+5}{2} - k, \tfrac{n+3}{2} - k, \ldots, \underbrace{\tfrac{n+3}{2} - k}_{(n-k).}, \underbrace{\tfrac{n+1}{2} - k}_{(n-k+1).}, \ldots, \tfrac{n+1}{2} - k\big) \\ \varepsilon_k^- \quad &= \quad \big(\tfrac{n-1}{2} - k, \ldots, \underbrace{\tfrac{n-1}{2} - k}_{(n-k).}, \underbrace{\tfrac{n-3}{2} - k}_{(n-k+1).}, \ldots, \tfrac{n-3}{2} - k, \tfrac{n-5}{2} - k\big). \end{aligned}$$

Hierbei wurde die in Lemme C.2 eingeführte Schreibweise verwendet.

Es soll hier das Spektrum des Rarita–Schwinger–Operators auf den Unterbündeln $\mathcal{E}_k^{\pm} := G \times_K E_k^{\pm}$ berechnet werden. Dieser Teil entspricht gerade dem Unterbündel $S_{3/2}$. Als nächstes erhält man wieder aus der Frobenius–Reziprozität die Zerlegung des Raums der $\mathcal{L}^2$–Schnitte im Unterbündel $\mathcal{E}_k^{\pm}$

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{E}_k^{\pm}) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} V_\gamma \otimes \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, E_k^{\pm}). \tag{E.6}$$

Analog zum Dirac–Operator hat auch die Einschränkung von D_T auf $V_\gamma \otimes \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, E_k^{\pm})$ die Form $1 \otimes (D_T)_\gamma$, und man zeigt (siehe [Sem90])

$$(D_T)_\gamma^2 \ = \ (\|\mu_\gamma + \delta_G\|^2 - \|\delta_G\|^2 \ + \ \tfrac{n}{8} \ - \ \tfrac{1}{2}) \,\mathrm{Id}\,. \tag{E.7}$$

Um jetzt das Spektrum des Operators D_T auf $\mathcal{E}_k^{\pm}$ zu berechnen, muß man die G–Darstellungen bestimmen, für die $\mathrm{Hom}_K(V_\gamma, E_k^{\pm}) \neq \emptyset$ gilt. Hierfür verwendet man wieder die im Anhang C zitierten Verzweigungsregeln. Identifiziert man dazu die Darstellungen mit ihren höchsten Gewichten, die durch (n+1)–Vektoren parametrisiert seien, so erhält man jeweils vier Serien von Darstellungen $\mu^\pm \in \hat{G}$ (vgl. (C.20)). Die Verzweigungsregeln für E_k^+ liefern die folgenden Serien μ^+:

$$
\begin{aligned}
\mu_1^+ &= l - \tfrac{3}{2} + \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \\
\mu_2^+ &= \tfrac{1}{2} + \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\
\mu_3^+ = \ldots = \mu_{n-k}^+ &= \tfrac{1}{2} \\
\mu_{n-k+1}^+ &= -\tfrac{1}{2} + \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \\
\mu_{n-k+2}^+ = \ldots = \mu_n^+ &= -\tfrac{1}{2} \\
\mu_{n+1}^+ &= -\tfrac{n}{2} + k - l.
\end{aligned}
$$

Die Verzweigungsregeln für E_k^- liefern die folgenden Serien μ^-:

$$
\begin{aligned}
\mu_1^- &= l + \tfrac{3}{2} - \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{cases} \\
\mu_2^- = \ldots = \mu_{n-k}^- &= \tfrac{1}{2} \\
\mu_{n-k+1}^- &= -\tfrac{1}{2} + \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \\
\mu_{n-k+2}^- = \ldots = \mu_{n-1}^- &= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\mu_n^- = -\tfrac{3}{2} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$$

$$\mu_{n+1}^- = -\tfrac{n}{2} + k - l.$$

Insbesondere sieht man, daß die unteren beiden Fälle genau den G–Darstellungen entsprechen, die bei der Zerlegung von $\mathcal{L}^2(S_k)$ auftraten (vgl. (C.20)). Die Ausdrücke für den Dirac–Operator bzw. den Rarita–Schwinger–Operator unterscheiden sich nur um $-\frac{1}{2}\,\mathrm{Id} = \frac{R}{n}\,\mathrm{Id}$ (siehe Formel (E.7) bzw. Satz C.3). Damit ergeben diese beiden Serien gerade die Eigenwerte $\lambda_{l,k} - \frac{R}{n}$ bzw. $\mu_{l,k} - \frac{R}{n}$ (siehe Satz E.11).

Berechnet man nun den Wert des Casimir–Operators in den ersten beiden Fällen, so erhält man jeweils zwei weitere Serien $\alpha_{l,k}^{\pm}$ und $\beta_{l,k}^{\pm}$ von Eigenwerten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_{l,k}^{+} &= \lambda_{l,k} - l - \tfrac{n-1}{2} \\
&= (l + \tfrac{n-1}{2})(l + n - k - 1) \\
&= \lambda_{l,k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{l,k}^{+} &= \mu_{l,k} - l - \tfrac{n+1}{2} \\
&= (l + \tfrac{n+1}{2})(l + n - k - 1) \\
&= \mu_{l,k+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{l,k}^{-} &= \lambda_{l,k} + l + \tfrac{n-1}{2} \\
&= (l + \tfrac{n-1}{2})(l + n - k + 1) \\
&= \lambda_{l,k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{l,k}^{-} &= \mu_{l,k} + l + \tfrac{n+1}{2} \\
&= (l + \tfrac{n+1}{2})(l + n - k + 1) \\
&= \mu_{l,k-1}.
\end{aligned}$$

Dabei genügen die Indizes k bzw. l ähnlichen Einschränkungen wie im Fall des Dirac–Operators (vgl. Theorem C.1). Insgesamt erhält man das folgende Resultat:

Satz E.15. *Das Spektrum des Operators D_T^2 auf dem komplex–projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$ (n ungerade) besteht aus den folgenden Serien:*

$$\{\lambda_{l,k} - \tfrac{R}{n}\}, \quad \{\mu_{l,k} - \tfrac{R}{n}\}, \quad \{\alpha_{l,k}^{\pm}\} = \{\lambda_{l,k\pm 1}\}, \quad \{\beta_{l,k}^{\pm}\} = \{\mu_{l,k\pm 1}\}.$$

E.6. Abschätzungen des Endomorphismus Q . In diesem Kapitel wird der Endomorphismus Q näher untersucht. Insbesondere wird eine Abschätzung für den kleinsten Eigenwert von Q bewiesen, aus der man mit Hilfe von Satz E.10 eine untere Schranke für das Spektrum des Rarita–Schwinger–Operators herleiten kann.

Als Folgerung aus Satz E.5 ergibt sich, daß auch der Endomorphismus Q die Aufspaltung von $S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M$ genau dann erhält, wenn (M, g) ein Einstein–Raum ist.

Folgerung E.16.

$$Q(i(\phi)) \quad = \quad -\tfrac{R}{n}\, i(\phi) \quad + \quad \tfrac{1}{n}\left(Ric(.) - \tfrac{R}{n}\, Id_{TM}\right) \cdot \phi.$$

Eine besonders einfache Form hat Q auf Räumen konstanter Schnittkrümmung K. Auf solchen Mannigfaltigkeiten gilt $R(X,Y)Z = K(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$ und man erhält direkt aus der Definition von Q

Satz E.17.

$$Q \quad = \quad -\frac{R}{n}\, p_1 \; + \; \frac{R}{n(n-1)}\, p_2.$$

Als nächstes soll der kleinste Eigenwert von Q abgeschätzt werden. Dazu genügt es zunächst, Q in einem Punkt $x \in M$ zu betrachten, und Q_x als Endomorphismus in $\mathrm{End}((S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M)_x) \cong \mathrm{End}(\Delta \otimes \Lambda^1)$ zu untersuchen.

Sei $\{s_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine lokale orthonormale Basis in einer Umgebung des Punktes x und $\{e_i\} = \{s_i(x)\}$ die entsprechende Basis im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n \cong TM_x$.
Der Endomorphismus Q_x soll jetzt mit Hilfe von Darstellungen der Lie–Algebra $\mathfrak{spin}(n)$ ausgedrückt werden. Als Basis betrachtet man $\{e_i e_j \;:\; 1 \le i < j \le n\}$. Unmittelbar aus der Definition von Q (siehe (E.4)) folgt

$$Q_x \quad = \quad \sum_{i<j} e_i \cdot e_j \cdot \otimes R(e_i, e_j)_x.$$

Der Endomorphismus $R(e_i, e_j)_x$ ist definiert durch $R(e_i, e_j)_x e_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijkl} e_l$. Dabei sind R_{ijkl} die Komponenten des Krümmungstensors im Punkt x bezüglich der Basis $\{e_i\}$.
Betrachtet man $R(e_i, e_j)_x$ als Element in $\mathfrak{so}(n)$, so gilt $R(e_i, e_j)_x = \sum_{k<l} R_{ijkl} E_{kl}$, wobei $\{E_{kl}\}$ die Standardbasis in $\mathfrak{so}(n)$ ist, d.h. $E_{kl}(e_m) = (\delta_{km} - \delta_{lm}) e_m$. Mit λ sei jetzt die Standarddarstellung von $\mathfrak{spin}(n)$ auf Λ^1 bezeichnet, d.h. $\lambda(e_k e_l) = \frac{1}{2} E_{kl}$. Dann gilt

$$Q_x \quad = \quad \tfrac{1}{2} \sum_{i<j,\,k<l} R_{ijkl}\, \mu(e_i e_j) \otimes \lambda(e_k e_l).$$

Dabei steht μ auch für die Spinordarstellung von $\mathfrak{spin}(n)$, d.h. $\mu(e_i e_j) = \mu(e_i) \circ \mu(e_j) = e_i \cdot e_j \cdot (i \neq j)$. Nach einer kleinen Umformung läßt sich Q_x folgendermaßen schreiben:

$$Q_x \quad = \quad \tfrac{1}{4} \sum_{i<j,\,k<l} R_{ijkl} \left([\mu \otimes \lambda](e_i e_j) \circ [\mu \otimes \lambda](e_k e_l) \; - \; \lambda(e_i e_j) \circ \lambda(e_k e_l) - \mu(e_i e_j) \circ \mu(e_k e_l) \right),$$

wobei λ hier abkürzend für die Darstellung $1 \otimes \lambda$ steht und μ entsprechend für $\mu \otimes 1$. Das nächste Lemma erlaubt eine weitere Vereinfachung dieses Ausdrucks.

Lemma E.18. *Bezeichnet* Ric *den Ricci–Tensor der Mannigfaltigkeit* (M, g) *im Punkt* x, *aufgefaßt als Endomorphismus von* $\Lambda^1 \cong (T^*_{\mathbb{C}})_x$, *so gilt*

$$\tfrac{1}{4} \sum_{i<j,k<l} R_{ijkl}\, \lambda(e_i e_j) \circ \lambda(e_k e_l) = \mathrm{Ric}, \tag{E.8}$$

$$\tfrac{1}{4} \sum_{i<j,k<l} R_{ijkl}\, \mu(e_i e_j) \circ \mu(e_k e_l) = \tfrac{R}{8}\, Id_{\Delta}. \tag{E.9}$$

Der Beweis ist im letzten Abschnitt enthalten (siehe E.7.1). Der Krümmungstensor im Punkt $x \in M$ läßt sich auch interpretieren als Endomorphismus auf $\mathfrak{spin}(n) \cong \Lambda^2$. Bezüglich der Basis $\{e_i e_j\}$ von $\mathfrak{spin}(n)$ ist dieser folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{R}(e_i e_j) \;=\; -\sum_{k<l} R_{ijkl} e_k e_l.$$

Der Endomorphismus $\mathcal{R}$ ist aufgrund der Symmetrien des Krümmungstensors symmetrisch, und es existiert somit eine spezielle Basis $\{\mathrm{f}_i\}$, bezüglich der er Diagonalgestalt hat, d.h. $\mathcal{R}(\mathrm{f}_i) = r_i\, \mathrm{f}_i$. Die Definition ist so gewählt, daß die Eigenwerte von $\mathcal{R}$ auf der Sphäre positive sind.

Betrachtet man auf der Lie–Algebra $\mathfrak{spin}(n)$ das Skalarprodukt $-1/8(n-1)B$, wobei B die Killingform bezeichnet, so wird $\{e_i e_j \;:\; i < j\}$ zu einer orthonormalen Basis. Der Ausdruck für Q_x ist unabhängig von der Wahl einer orthonormalen Basis in $\mathfrak{spin}(n)$, d.h. man kann von $\{e_i e_j\}$ zu einer Basis $\{\mathrm{f}_i\}$ übergehen, die $\mathcal{R}$ diagonalisiert. Mit diesen Bemerkungen und dem vorhergehende Lemma findet man

$$Q_x \quad = \quad -\tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} r_i\, [\mu \otimes \lambda](\mathrm{f}_i)^2 \quad - \quad \tfrac{R}{8}\, \mathrm{Id} \quad - \quad \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Ric}\,. \tag{E.10}$$

Im weiteren soll der Endomorphismus Q_x unter der Voraussetzung untersucht werden, daß (M, g) eine Einstein–Mannigfaltigkeit ist, d.h. es gilt $\mathrm{Ric} = \frac{R}{n}\,\mathrm{Id}$. In Kapitel E war gezeigt worden, daß diese Voraussetzung äquivalent dazu ist, daß Q die Aufspaltung
$S \otimes T^*_{\mathbb{C}}M \;\cong\; i(S) \oplus S_{3/2}$ erhält, was auch unmittelbar aus Formel (E.10) ersichtlich ist.

Im Punkt x betrachtet, entspricht diese Aufspaltung (siehe Lemma E.1) der Zerlegung der Darstellung $\mu \otimes \lambda$ in die Summe der beiden Darstellungen μ und τ, wobei τ die Darstellung bezeichnet, die zur Summe der höchsten Gewichte von μ und λ gehört.

Der Ausdruck für Q_x, eingeschränkt auf die Summanden S_x bzw. $(S_{3/2})_x$, ergibt sich aus (E.10), indem man dort $\mu \otimes \lambda$ durch μ bzw. τ ersetzt.
Aus Lemma E.18 folgt $-\frac{1}{4}\sum_i r_i \mu(\mathrm{f}_i)^2 = \frac{R}{8}\,\mathrm{Id}$ und damit

$$Q_x\big|_{i(S)_x} \;=\; -\,\tfrac{R}{n}\,\mathrm{Id},$$

was sich natürlich auch aus der Folgerung E.16 ergibt. Auf dem zweiten Summanden läßt sich kein geschlossener Ausdruck für Q_x angeben. Man erhält allerdings eine Abschätzung für den kleinsten Eigenwert.

Satz E.19. *Sei v ein beliebiger Vektor in $(S_{3/2})_x$ und $(\cdot,\cdot)$ ein fixiertes Skalarprodukt, dann gilt*

$$(Qv,v) \quad \geq \quad \left(\tfrac{1}{8}n(n+7)\, r_{min} \; - \; \tfrac{n+8}{8n}\, R\right)(v,v). \tag{E.11}$$

Dabei bezeichnet $r_{\min}$ den kleinsten Eigenwert des Krümmungsendomorphismus.

Beweis. Zum Beweis der Behauptung genügt es, die entsprechende Abschätzung in einem Punkt $x \in M$ nachzuweisen. Sei also $v \in (S_{3/2})_x$. Dann folgt aus Formel (E.10) und der Voraussetzung, daß (M,g) eine Einstein-Mannigfaltigkeit ist

$$\begin{aligned}(Qv,v) \quad &= \quad -\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} r_i\,(\tau(\mathrm{f}_i)^2 v, v) \; - \; \left(\tfrac{R}{n}+\tfrac{R}{8}\right)(v,v),\\ &\geq \quad -\tfrac{1}{4}\, r_{\min}\,(\tau(\mathrm{f}_i)^2 v, v) \; - \; \left(\tfrac{R}{n}+\tfrac{R}{8}\right)(v,v).\end{aligned}$$

Sei $C_{spin} := -\sum_{i=1}^n \mathrm{f}_i^2$ der Casimir–Operator der Lie–Algebra $\mathfrak{spin}(n)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}(Qv,v) \quad &\geq \quad \tfrac{1}{4}\, r_{\min}\,(\tau(C_{spin})v,v) \; - \; \left(\tfrac{R}{n}+\tfrac{R}{8}\right)(v,v).\\ &\geq \quad \left(\tfrac{1}{8}n(n+7)\, r_{min} \; - \; \tfrac{n+8}{8n}\, R\right)(v,v).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die zweite Aussage des folgenden Lemmas benutzt.

Lemma E.20.

$$\begin{aligned}&(1) \quad \mu\,(C_{spin}) \quad &= \quad \tfrac{1}{2}\, n(n-1)\,\mathrm{Id}\\ &(2) \quad \tau(C_{spin}) \quad &= \quad \tfrac{1}{2}\, n(n+7)\,\mathrm{Id}\,.\end{aligned}$$

Beweis. Zum Beweis kann man entweder die Formel

$$\mu(C_{Spin}) \quad = \quad (\|\, \mu \; + \; \delta_{Spin(n+1)}\,\|^2 \; - \; \|\,\delta_{Spin(n+1)}\,\|^2)\,\mathrm{Id}$$

verwenden, oder man rechnet die entsprechende Summe direkt aus. Das bietet sich besonders beim Beweis von (1) an

$$\mu(C_{Spin}) \; = \; -\sum_{i<j}\mu(e_ie_j)\mu(e_ie_j) \; = \; \tfrac{1}{2}\, n(n-1)\,\mathrm{Id}\,.$$

Die zweite Behauptung kann man auch wie folgt bewiesen werden.
Man betrachtet die Sphäre S^n als Riemannschen symmetrischen Raum mit der von der Killingform induzierten Metrik $g = -B$. Dann ist S^n ein Raum konstanter Schnittkrümmung und Skalarkrümmung $R = n/2$. Damit folgt aus Satz E.17

$$Q\big|_{S_{3/2}} \; = \; \tfrac{R}{n(n-1)}\,\mathrm{Id} \; = \; \tfrac{1}{2(n-1)}\,\mathrm{Id}\,.$$

Rechnet man in einem fixiertem Punkt $p \in S^n$, so folgt aus (E.10)

$$\begin{aligned}-\textstyle\sum_{i<j}\tau(e_ie_j)^2 \quad &= \quad 4\left(Q\big|_{S_{3/2}} \; + \; \tfrac{R}{n} \; + \; \tfrac{R}{8}\right) 2(n-1)\,\mathrm{Id}\\ &= \quad 8(n-1)\left(\tfrac{1}{2(n-1)} \; + \; \tfrac{1}{2} \; + \; \tfrac{n}{16}\right)\mathrm{Id}\\ &= \quad \tfrac{1}{2}\, n(n+7)\,\mathrm{Id},\end{aligned}$$

und man erhält

$$\tau(C_{spin}) \;=\; \tfrac{1}{2}\, n(n+7)\,\mathrm{Id}\,.$$

Analog hätte man natürlich auch (1) zeigen können. □

□

Beispiel. *Für die Sphäre S^n mit der von der Killing–Form induzierten Metrik gilt $\mathcal{R} = \frac{1}{2(n-1)}\,\mathrm{Id}$, d.h. $r_{\min} = \frac{1}{2(n-1)}$. Für $v \in S_{3/2}$ folgt damit aus dem eben bewiesenen Satz*

$$(Qv, v) \quad \geq \tfrac{1}{2(n-1)}\,(v, v).$$

Die Sphäre realisiert also die Gleichheit in der Ungleichung (E.11).

In bezug auf die Eigenwerte des Krümmungsendomorphismus $\mathcal{R}$ spielt die Sphäre eine Sonderrolle.

Fakt E.1. *Sei (M, g) eine kompakte und einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Hat der Krümmungsendomorphismus nur positive Eigenwerte, so ist M homöomorph zur Sphäre.*

Der zitierte Fakt ist ein Theorem von M. Micallef und J. Moore [MJ88] und stellt eine Verschärfung eines Theorems von S. Gallot und D. Meyer dar (siehe [GM75]). In den Dimensionen 4,5 und 6 ist der Homöomorphismus des Theorems sogar ein Diffeomorphismus (siehe [Ham86] und [MJ88]). Der nächste Fakt folgt aus einer einfachen Rechnung, die die spezielle Gestalt des Krümmungstensors auf symmetrischen Räumen nutzt (siehe z.B. [GM75]).

Fakt E.2. *Auf kompakten symmetrischen Räumen hat $\mathcal{R}$ nichtnegative Eigenwerte. Auf nichtkompakten symmetrischen Räumen hat $\mathcal{R}$ nichtpositive Eigenwerte.*

Folgerung E.21. *Sei (M^n, g) ein kompakter symmetrischer Raum mit der von der Killing–Form induzierten Metrik und sei $n > 8$. Dann hat der Rarita–Schwinger–Operator auf M einen trivialen Kern.*

Beweis. Aus der Weitzenböck–Formel folgt, daß man überprüfen muß, wann $\frac{R}{4}\,\mathrm{Id} + Q$ positiv ist (vgl. Satz E.9). Verwendet man die Ungleichung (E.11) und den eben zitierten Fakt, so kann man Q auf $S_{3/2}$ durch $-R\,\frac{n+8}{8n}$ abschätzen, woraus sich dann die Behauptung ergibt. Einen anderen Beweis liefert die Formel, die den Rarita–Schwinger–Operator auf symmetrischen Räumen mit Hilfe der entsprechenden Casimir–Operatoren ausdrückt (vgl. Anhang E.5). □

Der kleinste Eigenwert $r_{\min}$ läßt sich zum Beispiel in bezug auf die Schnittkrümmung K der Mannigfaltigkeit (M, g) abschätzen. Als erstes folgt direkt aus der Definition des Krümmungsendomorphismus $K \geq r_{min}$. Die Gleichheit wird dabei angenommen, wenn der r_{min} entsprechende Eigenvektor eine zerlegbare 2-Form ist, d.h. sich als äußeres Produkt zweier 1-Formen schreiben läßt. Das gilt z.B. auf Hyperflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung. Unter der Voraussetzung, daß $\delta \leq K \leq \Delta$, erhält man die folgende Abschätzung für $r_{\min}$ (siehe [BK78],Prop. 3.8)

Fakt E.3. *Sei* (M,g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und genüge die Schnittkrümmung der Bedingung:* $\delta \leq K \leq \Delta$. *Dann gilt*

$$r_{\min} \quad \geq \quad \tfrac{1}{2}(\Delta+\delta) \; - \; \tfrac{1}{6}(\Delta-\delta)(4[\tfrac{n}{2}]-1).$$

Setzt man diese Ungleichung in (E.11) ein und berücksichtigt die Abschätzung $n(n-1)\delta \leq R \leq n(n-1)\Delta$ für die Skalarkrümmung R, so ergibt sich die folgende Abschätzung für Q in Termen der Größen Δ und δ.

Folgerung E.22. *Unter der Voraussetzung* $\delta \leq K \leq \Delta$ *gilt*

$$Q \quad \geq \quad -\tfrac{1}{24}(\Delta-\delta)n(n+7)(2[\tfrac{n}{2}]+1) \quad + \quad \Delta.$$

Diese Folgerung liefert allerdings nur für Mannigfaltigkeiten kleiner Dimension eine untere Schranke für das Spektrum des Rarita–Schwinger–Operators, da man die Weitzenböck–Formel nur sinnvoll anwenden kann, wenn $Q + \frac{R}{n}\,\mathrm{Id}$ durch etwas Positives abgeschätzt wird. Möchte man die Folgerung anwenden, so muß für große n die Differenz $(\Delta-\delta)$ sehr klein sein. Dann folgt aber aus dem Sphärentheorem (siehe [CE75]), daß M homöomorph zur Sphäre ist.

Als nächstes soll der Endomorphismus Q in der Dimension 4 untersucht werden. Wie schon bemerkt, gilt für 4–dimensionale Mannigfaltigkeiten

$$S^{\pm}_{3/2} \quad \cong \Lambda^2_{\pm}\, M \;\otimes\; S_{\mp}, \tag{E.12}$$

wobei $\Lambda^2_{\pm}M$ den Raum der selbst– bzw. antiselbstdualen 2–Formen bezeichnet. Ziel ist es jetzt, Q bezüglich dieser Identifizierung auszudrücken. Hierzu benötigt man die spezielle Gestalt des Krümmungstensors $\mathcal{R}$ auf 4–dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Die angeführten Eigenschaften von $\mathcal{R}$ sind z.B. in [Fri81] enthalten. Man hat allerdings zu beachten, daß in der vorligenden Arbeit der Operator $\mathcal{R}$ so definiert wurde, daß die Eigenwerte auf der Standardsphäre positiv sind. Somit ergeben sich unterschiedliche Vorzeichen.

Betrachtet man den Krümmungstensor R als Abbildung auf den 2–Formen, so hat dieser bezüglich der Aufspaltung $\Lambda^2 M \;=\; \Lambda^2_+ M \;\oplus\; \Lambda^2_- M$ die Matrixgestalt

$$\mathcal{R} \quad = \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}.$$

Dabei sind A,C selbstadjungierte Endomorphismen mit $\mathrm{Tr}(A) \;=\; \mathrm{Tr}(C) \;=\; R/4$.
Einstein–Mannigfaltigkeiten sind durch die Bedingung $B \equiv 0$ charakterisiert. Den Weyl–Tensor $\mathcal{W}$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit kann man, analog zum Krümmungstensor, als Abbildung auf den 2–Formen verstehen, und analog zu $\mathcal{R}$ findet man die folgende Matrixgestalt:

$$\mathcal{W} \quad = \quad \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt $W_+ = A - R/12$ und $W_- = C - R/12$, und insbesondere hat man $\mathrm{Tr}(W_\pm) = 0$. Der Krümmungstensor läßt sich mit Hilfe des Weyl–Tensors ausdrücken, und speziell für Einstein–Mannigfaltigkeiten erhält man

$$\mathcal{R} \;=\; \mathcal{W} \;+\; \tfrac{R}{12}\, Id.$$

Der nächste Satz beschreibt jetzt den Endomorphismus Q bezüglich der Identifizierung (E.12).

Satz E.23. *Sei (M, g) eine 4–dimensionale Einstein–Mannigfaltigkeit, dann gilt*

$$Q|_{S^\pm_{3/2}} \;=\; \frac{R}{12}\,\mathrm{Id} \;-\; 2\,W^\pm \otimes 1.$$

Beweis. Zum Beweis rechnet man in einem fixierten Punkt $x \in M$. Aus der Isomorphie $(S^\pm_{3/2})_x \;\cong\; V_{\gamma^\pm} \;\cong\; \Lambda^2_\pm \otimes \Delta_\mp$ und der Formel (E.10) ergibt sich

$$Q_\pm \;:=\; Q|_{(S^\pm_{3/2})_x} \;=\; -\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{6}(\lambda^2_\pm \otimes \mu_\mp)(\mathrm{f}_i)\circ(\lambda^2_\pm \otimes \mu_\mp)(R(\mathrm{f}_i)) \;-\; \tfrac{3}{8}\,R\,\mathrm{Id},$$

wobei $\lambda^2_\pm$ bzw. $\mu_\pm$ die Spin(4)–Darstellungen $\Lambda^2_\pm$ bzw. $\Delta_\mp$ bezeichnen, und $\{\mathrm{f}_i\}_{i=1,\ldots,6}$ eine orthonormale Basis in $\Lambda^2 \cong \mathfrak{spin}(4)$ ist. Im weiteren soll jetzt nur Q_+ untersucht werden. Die entsprechende Aussage für Q_- beweist man mit analogen Rechnungen. Sei $\{\mathrm{f}^\pm_i\}_{i=1,\ldots,3}$ eine orthonormale Basis in $\Lambda^2_\pm$, dann gilt

$$\begin{aligned} Q_+ \;=\; -\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{6}&(\lambda^2_+ \otimes \mu_-)(\mathrm{f}^+_i)\circ(\lambda^2_+ \otimes \mu_-)(R(\mathrm{f}^+_i)) \;- \\ &- \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{6}(\lambda^2_+ \otimes \mu_-)(\mathrm{f}^-_i)\circ(\lambda^2_+ \otimes \mu_-)(R(\mathrm{f}^-_i)) \;-\; \tfrac{3}{8}\,R\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned}$$

Da $R(\mathrm{f}^\pm_i) \in \Lambda^2_\pm$ und $\mu_-(\mathrm{f}^+_i) = 0 = \lambda^2_+(\mathrm{f}^-_i)$ für $i = 1, \ldots, 6$ (siehe Anhang E.7), läßt sich dieser Ausdruck noch folgendermaßen vereinfachen:

$$Q_+ \;=\; -\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\Big(\Big[\lambda^2_+(\mathrm{f}^+_i)\circ(\lambda^2_+)(R(\mathrm{f}^+_i))\Big]\otimes 1 \;+\; 1\otimes\Big[\mu_-(\mathrm{f}^-_i)\circ\mu_-(R(\mathrm{f}^-_i))\Big]\Big) \;-\; \tfrac{3}{8}\,R\,\mathrm{Id}\,.$$

Die behauptete Form von Q_+ folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma E.24.

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda^2_+(\mathrm{f}^+_i)\circ\lambda^2_+R((\mathrm{f}^+_i)) \;=\; -\tfrac{4}{3}\,R\;\mathrm{Id} + 8\,W^+$$

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_-(\mathrm{f}^-_i)\circ\mu_-(R(\mathrm{f}^-_i)) \;=\; -\tfrac{R}{2}\,\mathrm{Id}\,.$$

Beweis. Der Beweis der ersten Gleichung folgt aus der konkreten Matrixrealisierung der Darstellung λ_+^2 und insbesondere aus der Formel (E.18) (siehe Anhang E.7).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \lambda_+^2(\mathrm{f}_i^+) \circ \lambda_+^2 R((\mathrm{f}_i^+)) &= \sum_{i,j} (A)_{ij} \lambda_+^2(\mathrm{f}_i^+) \circ \lambda_+^2(\mathrm{f}_j^+) \\
&= -8 \begin{pmatrix} A_{22}+A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}+A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{22}+A_{11} \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & 0 & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & 0 \end{pmatrix} \\
&= -8Tr(A)\,\mathrm{Id} \quad + \quad 8\,\mathcal{R} \\
&= -2R\,\mathrm{Id} \quad + \quad 8\,\mathcal{R} \\
&= (-2R + 8/12R)\,\mathrm{Id} \quad + \quad 8\,\mathcal{W} \\
&= -4/3R\,\mathrm{Id} \quad + \quad 8\,\mathcal{W}.
\end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Gleichung ergibt sich aus der Formel (E.16). Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \mu_-(\mathrm{f}_i^-) \circ \mu_-(R(\mathrm{f}_i^-)) &= \sum_{i=1}^{3} C_{i,j} \mu_-(\mathrm{f}_i^-) \circ \mu_-(\mathrm{f}_j^-) \\
&= -2(C_{11}+C_{22}+C_{33}) \;=\; -2\,\mathrm{Tr}(C) \;=\; -\tfrac{R}{2}\,\mathrm{Id}\,.
\end{aligned}$$

□

□

Bezeichne $w_{\max}$ den größten Eigenwert des Weyl–Tensors $\mathcal{W}$. Dann erhält man aus Satz E.10 und Satz E.23 die folgende untere Schranke für das Spektrum des Rarita–Schwinger–Operators D_T.

Folgerung E.25. *Sei (M,g) eine 4-dimensionale Einstein–Mannigfaltigkeit, dann gilt für den kleinsten Eigenwert μ_0 des Operators D_T^2, eingeschränkt auf Schnitte in $S_{3/2}$*

$$\mu_0 \quad \geq \quad \tfrac{4}{9}\,R \;-\; \tfrac{8}{3}\,w_{\max}.$$

Insbesondere hat der Rarita–Schwinger–Operator einen trivialen Kern, falls die Voraussetzung $w_{\max} \leq \frac{R}{6}$ *erfüllt ist.*

E.7. Ergänzende Rechnungen . In diesem Abschnitt sollen einige elementare Eigenschaften von Spin(4)–Darstellungen angegeben werden, die im letzten Abschnitt benötigt wurden. Außerdem wird der Beweis von Lemma E.18 gegeben.

Dazu bezeichne $\Delta = \Delta_+ \oplus \Delta_-$ wieder den Spinormodul mit der fixierten Basis $\{u(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\}$ (siehe Anhang A). Sei $\{e_i e_j \;:\; 1 \leq i < j \leq 4\}$ die Standardbasis in $\mathfrak{spin}(4)$, dann folgt aus der expliziten Beschreibung der Clifford–Multiplikation

$$\begin{aligned} \mu_\pm(e_1 e_2) &= \pm\, \mu_\pm(e_3 e_4) \\ \mu_\pm(e_1 e_3) &= \mp\, \mu_\pm(e_2 e_4) \\ \mu_\pm(e_1 e_4) &= \pm\, \mu_\pm(e_2 e_3). \end{aligned} \tag{E.13}$$

Definiert man jetzt

$$\mathrm{f}_1^\pm := \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 e_2 \pm e_3 e_4) \qquad \mathrm{f}_2^\pm := \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 e_3 \mp e_2 e_4) \qquad \mathrm{f}_3^\pm := \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 e_4 \mp e_2 e_3)\,, \tag{E.14}$$

so bilden die $\{\mathrm{f}_j^\pm\}$, $j = 1, 2, 3$, eine orthonormale Basis in $\mathfrak{spin}(4) \cong \Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$. Unter diesem Isomorphismus gilt $\mathrm{f}_j^\pm \in \Lambda^2_\pm$. Unmittelbar aus der Definition und den Gleichungen (E.13) folgt für beliebige Spinoren $\phi_\pm \in \Delta_\pm$

$$\mathrm{f}_j^- \cdot \phi_+ = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{f}_j^+ \cdot \phi_- = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{E.15}$$

Außerdem findet man durch direktes Anwenden der Clifford–Multiplikation

$$\begin{aligned} \mu_-(\mathrm{f}_i^-) \circ \mu_-(\mathrm{f}_i^-) &= -2\,\mathrm{Id} && i = 1, 2, 3 \\ \mu_-(\mathrm{f}_i^-) \circ \mu_-(\mathrm{f}_j^-) &= -\,\mu_-(\mathrm{f}_j^-) \circ \mu_-(\mathrm{f}_i^-) && 1 \leq i < j \leq 3. \end{aligned} \tag{E.16}$$

Analoge Aussagen gelten natürlich auch auf Δ_+. Als nächstes sollen die Spin(4)–Darstellungen $\Lambda^2_\pm$ betrachtet werden. Bezeichne $\widetilde{E}_{ij}$ die Matrix, die als einzigen von Null verschiedenen Eintrag eine Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte hat, d.h. $\widetilde{E}_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e_k$ und $E_{ij} = \widetilde{E}_{ij} - \widetilde{E}_{ji}$. Bezüglich der Basis $\{\mathrm{f}_j^\pm\}$ findet man dann die folgende Matrixgestalt der Darstellung λ^2_+:

$$\begin{aligned} \lambda^2_+(\mathrm{f}_i^+) &= \tfrac{4}{\sqrt{2}}\, E_{kj} && \in \mathrm{End}(\Lambda^2_+) \\ \lambda^2_+(\mathrm{f}_i^-) &= 0. \end{aligned} \tag{E.17}$$

Dabei durchläuft *(ijk)* die Permutationen von *(123)*. Durch einfache Matrizenmultiplikation ergibt sich schließlich noch

$$\lambda^2_+(\mathrm{f}_i^+)^2 = -8\,(\widetilde{E}_{jj} + \widetilde{E}_{jj}) \tag{E.18}$$

$$\lambda^2_+(\mathrm{f}_i^+) \circ \lambda^2_+(\mathrm{f}_j^+) = 8\,\widetilde{E}_{ij}. \tag{E.19}$$

E.7.1. *Beweis des Lemmas* E.18 . Zum Beweis der ersten Gleichung nutzt man die Beziehung zwischen dem Krümmungstensor R^S des Spinorbündels und dem Riemannschen Krümmungstensor. Es gilt $R^S(X,Y)\phi = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}(X \wedge Y) \cdot \phi$ (siehe [BFGK90]). Nach Anwendung der ersten Bianchi–Identität erhält man hieraus

$$\sum_{j=1}^{n} e_j\, R^S(X, e_j)\phi = -\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Ric}(X) \cdot \phi.$$

Setzt man in dieser Gleichung $X = e_i$ und multipliziert beide Seiten mit e_i, so folgt

$$\sum_{\substack{i,j\\k<l}} R_{ijkl}\, e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot e_l \quad = \quad -\sum_i R_{im}\, e_i \cdot e_m \cdot .$$

Dabei bezeichnet R_{ab} die Komponenten des Ricci–Tensors bezüglich der orthonormalen Basis $\{e_i\}$. Aus der Symmetrie des Ricci–Tensors, ergibt sich jetzt die Behauptung des Lemmas

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sum_{\substack{i<j\\k<l}} R_{ijkl}\, e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot e_l &= \tfrac{1}{8}\sum_{\substack{i,j\\k<l}} R_{ijkl}\, e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot e_l \\ &= \tfrac{R}{8}\,\mathrm{Id}\,.\end{aligned}$$

Zum Beweis der zweiten Gleichung sei $\{E_{ij}\}$ wieder die Standardbasis der Liealgebra $\mathfrak{so}(n)$, und λ die Standarddarstellung von $\mathfrak{so}(n)$ auf Λ^1, dh. $\lambda(E_{ij}) = \frac{1}{2}\lambda(e_i e_j) = E_{ij}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sum_{\substack{i<j\\k<l}} R_{ijkl}\lambda(e_ie_j)\circ\lambda(e_ke_l) &= \tfrac{1}{4}\sum_{\substack{i<j\\k<l}} R_{ijkl}\lambda(2E_{ij})\circ\lambda(2E_{kl}) \\ &= \sum_{\substack{i<j\\k<l}} R_{ijkl}\lambda(E_{ij})\circ\lambda(E_{kl}) \\ &= \tfrac{1}{4}\sum_{\substack{i,j\\k,l}} R_{ijkl}\,\lambda(E_{ij})\circ\lambda(E_{kl}).\end{aligned}$$

Das kann man weiter umformen mit Hilfe der folgenden Formel für die Multiplikation der Matrizen E_{ij}

$$E_{ij}\circ E_{kl} = \delta_{kj}\widetilde{E}_{li} - \delta_{ki}\widetilde{E}_{lj} + \delta_{li}\widetilde{E}_{kj} - \delta_{lj}\widetilde{E}_{ki}$$

Hiermit erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j\\k,l}} R_{ijkl}E_{ij}\circ E_{kl} &= \sum_{\substack{i,j\\k,l}} R_{ijkl}(\delta_{kj}\widetilde{E}_{li} - \delta_{ki}\widetilde{E}_{lj} + \delta_{li}\widetilde{E}_{kj} - \delta_{lj}\widetilde{E}_{ki}) \\ &= \sum_{\substack{i,j\\k,l}}(R_{ijjl}\widetilde{E}_{li} - R_{ijil}\widetilde{E}_{lj} + R_{ijki}\widetilde{E}_{kj} - R_{ijkj}\widetilde{E}_{ki} \\ &= \sum_{i,j,l}(R_{ijjl} + R_{ijjl} + R_{ijjl} + R_{ijjl})\widetilde{E}_{li} \\ &= 4\sum_{li} Ric_{li}\widetilde{E}_{li} \\ &= 4\,\mathrm{Ric}\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die zweite zu beweisende Gleichung.

Literatur

[Ada69] Adams. *Lectures on Lie groups*. Benjamin, New York, 1969.

[Ale68] D.V. Alekseevskii. Riemannian spaces with exceptional holonomy groups. *Funktional Anal. Appl.*, 2:97–105, 1968.

[AP86] D.V. Alekseevskii and A.M. Perelomov. Invariant Kähler–Einstein metrics on compact homogeneous spaces. *Funk. Anal. i. Pri.*, 20:1–16, 1986.

[AS77] M.F. Atiyah and W. Schmid. A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups. *Invent. Math.*, 42:1–65, 1977.

[Bär93] C. Bär. Real Killing spinors and holonomy. *Comm. Math. Phys.*, 154:509–521, 1993.

[Bau89] H. Baum. Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinor. *Ann. Global Anal. Geom.*, 7:205–226, 1989.

[Bau93] H. Baum. Eigenvalue estimates for Dirac Operator coupled to instantons. Preprint, SFB 288, 1993.

[Bes88] A. Besse. *Einstein manifolds*. Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete. Springer, 1988.

[BFGK90] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, and I. Kath. *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds*. Teubner–Texte zur Math., 124. Teubner–Verlag, 1990.

[BGM71] M. Berger, P. Gauduchon, and E. Mazet. Le spectre d'une variété riemannienne. *LNM*, 194, 1971.

[BGM93] C.P. Boyer, K. Galicki, and B.M. Mann. Quaternionic reduction and Einstein manifolds. *Commun. Anal. Geom.*, 2:229–279, 1993.

[BGV90] Berline, Getzler, and Vergne. *Dirac Operator and Heat Kernel*. Grundlehren der Math. Springer, 1990.

[BH58] A. Borel and F. Hirzebruch. Characteristic classes and homogeneous spaces,I. *Am. J. Math.*, 80:458–538, 1958.

[BK78] J.P. Bourguignon and H. Karcher. Curvature operators, pinching estimates and geometric examples. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 11:71–92, 1978.

[Bla76] D. Blair. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. LNM 509. Springer, 1976.

[Boo61] W.M. Boothby. Homogeneous complex contact manifolds. *Proc. Symp. Pure Math.*, 3:144–154, 1961.

[BR90] F.E. Burstall and J.H. Rawnsley. *Twistor theory for Riemannian symmetric spaces*. LNM, 1424. Springer, 1990.

[Bra90] T. Branson. Harmonic analysis in vector bundles associated to the rotation and Spin groups. *J. Functional Analysis*, 106:314–328, 1990.

[CE75] E. Cheeger and D. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North–Holland, Amsterdam, 1975.

[CFG89] M. Cahen, A. Frank, and S. Gutt. Spectrum of the Dirac operator on complex projective space $P_{2q-1}(\mathbb{C})$. *Letters in Mathematical Physics*, 18:165–176, 1989.

[FG85] Th. Friedrich and R. Grunewald. On the first eigenvalue of the Dirac operator on 6–dimensional manifolds. *Ann. Global. Anal. Geom.*, 3:265–273, 1985.

[FK82] Th. Friedrich and H. Kurke. Compact four–dimensional self–dual Einstein manifolds with positive scalar curvature. *Math. Nachr.*, 106:271–299, 1982.

[FK90] Th. Friedrich and I. Kath. Compact seven-dimensional manifolds with Killing spinors. *Comm. Math. Phys.*, 133:543–561, 1990.

[Fri80] Th. Friedrich. Der erste Eigenwert des Dirac–Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkr mmung. *Math. Nachr.*, 97:117–146, 1980.

[Fri81] Th. Friedrich. *In: Self–duality of Riemannian Manifolds and Connections*. Teubner–Texte zur Math., 34. Teubner–Verlag, 1981.

[Fri93] Th. Friedrich. The classification of 4–dimensional manifolds with small eigenvalue of the Dirac operator. *Math. Ann.*, 295:565–574, 1993.

[GM75] S. Gallot and D. Meyer. Opérateur de courbure et laplacian des formes différentielles d'une variété riemannienne. *J. Math. pures et appl.*, 54:259–284, 1975.

[Ham86] R. Hamilton. Four manifolds with positive curvature operator. *J. Diff. Geom.*, 24:153–179, 1986.

[Hel78] Helgason. *Differntial Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1978.

[Hen84] R. Henze. Einige Untersuchungen der Eigenwerte des zu einem Zusammenhang assoziierten Dirac–Operators. Diplomarbeit, Humboldt–Universität zu Berlin, 1984.

[Hij86] O. Hijazi. A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors. *Comm. Math. Phys.*, 104:151–162, 1986.

[Hij94] O. Hijazi. Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 160:563–579, 1994.

[Hit74] N. Hitchin. Compact four–dimensional Einstein manifolds. *J. Diff. Geom.*, 9:435–442, 1974.

[HS89] F. Hirzebruch and P. Slodowy. Elliptic genera, involutions and homogeneous spin–manifolds. Preprint, MPI, 58, 1989.

[IK79] S. Ishihara and M. Konishi. Real contact 3–structures and complex contact structure. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 3:151–161, 1979.

[IK80] S. Ishihara and M. Konishi. Complex almost contact manifolds. *Kodai Math. J.*, 3:385–396, 1980.

[Ike75] A. Ikeda. Formally self adjointness for the Dirac operator on homogeneous spaces. *Osaka Math. J.*, 12:173–185, 1975.

[Ish74] S. Ishihara. Quaternionic Kählerian manifolds. *J. Diff. Geom.*, 9:483–500, 1974.

[IT78] A. Ikeda and Y. Taniguchi. Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$. *Osaka J. Math.*, 15:515–546, 1978.

[Kir86] K.-D. Kirchberg. An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, 4:291–325, 1986.

[Kir88] K.-D. Kirchberg. Compact six-dimensional Kähler spin manifolds of positive scalar curvature with smallest possible first eigenvalue of the Dirac operator. *Math. Ann.*, 282:157–176, 1988.

[Kir91] K.-D. Kirchberg. Twistor spinors on Kähler manifolds and the first eigenvalue of the Dirac operator. *J. Geom. Phys.*, 7:449–468, 1991.

[Kir93] K.-D. Kirchberg. Killing Spinors on Kähler Manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 11:141–164, 1993.

[KO73] S. Kobayashi and T. Ochiai. Characterization of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ.*, 13-1:31–47, 1973.

[Kob59] S. Kobayashi. Remarks on complex contact manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10:164–167, 1959.

[Koi80] N. Koiso. Rigidity and stability of Einstein metrics – the case of compact symmetric spaces. *Osaka J. Math.*, 17:51–73, 1980.

[KS94] K.D. Kirchberg and U. Semmelmann. Complex Contact Structures and the First Eigenvalue of the Dirac Operator on Kähler manifolds. Preprint, SFB 288, 1994.

[Kuw88] R. Kuwabara. Spectrum of the Schrödinger operator on a line bundle over complex projective spaces. *Tôkohu Math. J.*, 40:199–211, 1988.

[Lic87] A. Lichnerowicz. Spin manifolds, Killing spinors and the universality of the Hijazi inequality. *Letters in Math. Phys.*, 13:331–344, 1987.

[Lic90] A. Lichnerowicz. La première valeur propre de l'opérateur de Dirac pour une variètès Kählèrienne et son cas limite. *C.R.Acad. Sci. Paris*, 311:717–722, 1990.

[MJ88] M.J. Micallef and Moore J.D. Minimal two–spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two–planes. *Ann. of Math.*, 127:199–227, 1988.

[Mor94] A. Moroianu. La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variètès kählèriennes compactes. *C.R.Acad. Sci. Paris*, 1994. á para tre.

[NT87] T. Nitta and M. Takeuchi. Contact structures on twistor spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 39:138–160, 1987.

[Par67] Parthasaraty. Dirac operator and the discrete series. *Ann. of Math.*, 85:1–30, 1967.

[Sal82] S.M. Salamon. Quaternionic Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 67:143–171, 1982.

[Sem90] U. Semmelmann. Über einige Eigenschaften des Rarita–Schwinger–Operators. Diplomarbeit, Humboldt–Universität, 1990.

[Shi78] Y. Shibuya. On the existence of complex almost contact manifolds. *Kodai Math. J.*, 1:197–204, 1978.

[SS93] S. Seifarth and U. Semmelmann. The spectrum of the Dirac operator on the complex projective space $P_{2q-1}(\mathbb{C})$. Preprint, SFB 288, 1993.

[Swa91] A. Swann. HyperKähler and quaternionic Kähler geometry. *Math. Ann.*, 289:421–450, 1991.

[Tak78] M. Takeuchi. Homogeneous Kähler submanifolds in complex projective spaces. *Japan J. Math.*, 4:171–233, 1978.

[Wal73] Wallach. *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*. Marcel Dekker, 1973.

[Wan91] M. Wang. Preserving Parallel Spinors under Metric Deformation. *Indiana Univ. J. Math.*, 40:815–844, 91.

[Wol65] J.A. Wolf. Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces. *J. of Math. and Mech.*, 14:1033–1047, 1965.