

0. (Prolog) Derivate

A. Übersicht

Wesentliche Anlagemärkte sind

Aktien	<i>equities, stocks</i>
Anleihen	<i>bonds</i>
Rohstoffe	<i>commodities</i> (Waren/handelbare Rohstoffe, z.B. Edel- u. Industriemetalle, Agrar-Produkte, ...)

Kassa-Markt (*spot market*): Kauf und Abwicklung sofort (“heute”)

Termin-Geschäft

Vertrag heute ($t = 0$)

Abwicklung in der Zukunft (z.B. für $t = T > 0$, T “Fälligkeit”, in Jahren)

Bezeichnung: S_t (oder $S(t)$) sei der *Marktpreis* des Anlage-Objektes zum Zeitpunkt t .

Beispiele

- 1.) Ein Aktionär will in einem halben Jahr 1000 Aktien verkaufen, deren heutiger Wert 50 Euro pro Stück beträgt. Risiko: *Crash!* Ziel/Wunsch: in 6 Monaten sollen die Aktien mindestens 50 Euro einbringen! ($T = 0.5$)
- 2.) Ein Landwirt erwartet in drei Monaten (im Juli) eine Ernte von 800 Tonnen Mais. Risiko: Missernte oder Preisverfall. Ziel/Wunsch: Er will diese Ernte heute schon verkaufen, und erst Ende Juli ($T = 0.25$) liefern.
Frage: Welcher Preis ist **heute** der “richtige”?
- 3.) Kaufe heute die Ladung eines Öltankers in Dollar, der erst in 2 Wochen in Rotterdam entladen werden kann und dann in Euro verkauft werden soll. Preis? Risiken: Preisverfall, Währungsrisiko.
- 4.) Ein Unternehmen hat einen Kredit mit variablen Zinszahlungen aufgenommen, Zinsrate $r_v(t)$. Risiko: Zinszahlungen können steigen. Ziel: Absicherung

u.s.w. !

Problem jeweils: Der (über Gewinn/Verlust) entscheidende zukünftige Wert S_T ist heute ($t = 0$) unbekannt. Man kennt heute lediglich S_0 und die “gegenwärtige” Zinsrate, und eventuell weitere Daten von $t \leq 0$.

Aber:

Der Vertrag wird heute mit Angabe des zum Zeitpunkt T zu zahlenden Preises F abgeschlossen.

Frage:

Was ist der faire Preis F , so dass heute ein solches Termingeschäft zustande kommt? (Dies zieht weitere Fragen nach sich, z.B. wie sich “der Zins” entwickeln wird.)

Die meisten dieser Aufgaben lassen sich mit **Derivaten** lösen. (Das sind Finanzprodukte, die von den Basiswerten “abgeleitet” werden.) Drei große Klassen von Derivaten sind:

Futures/Forwards
Optionen
Swaps

Die in letzter Zeit stark verbreiteten “Zertifikate” bauen auf Optionen auf.

Praktische Frage: Bewertung solcher Derivate!?

“Financial Engineering”

Für die Bewertung von Futures/Forwards und Swaps reicht bei den Rechenmethoden üblicherweise relativ einfache Mathematik aus. Bei Optionen sind jedoch anspruchsvolle **numerische Näherungsverfahren** erforderlich!

Vorlesung: im Wesentlichen Numerik für Optionen.

Es werden benötigt:

Grundlagen der Stochastik
Grundlagen der Differentialgleichungen, auch elementare Partielle Dgl.
Numerik I (und II)

Inhalt

Kapitel 1: Modellierung
Kapitel 2: Zufallszahlen
Kapitel 3: Monte Carlo Verfahren
Kapitel 4: Standardmethoden für Standardoptionen
(Kapitel 5: weitere Verfahren, insbesondere für exotische Optionen)

B. Forwards und Arbitrage

Definition:

Ein **Forward** ist ein Vertrag zwischen Vertragspartnern A und B , abgeschlossen “heute” zum Zeitpunkt $t = 0$, wonach zum Zeitpunkt T der Partner A eine bestimmte Menge eines Handelsgegenstandes (heutiger Marktpreis S_0) liefert und B dafür den Preis F zahlt.

Behauptung

Falls für $0 \leq t \leq T$ das Produkt weder Kosten verursacht noch Ertrag erzielt, und wenn r “die” Zinsrate einer risikofreien Anlage zur Laufzeit T ist, dann ist (unter geeigneten weiteren Voraussetzungen)

$$F = S_0 e^{rT}$$

der angemessene Preis.

Der Beweis von $F = S_0 e^{rT}$ erfolgt mit dem No-Arbitrage-Prinzip.

Definition: Arbitrage = risikofreier Profit

oder konkreter:

Arbitrage ist die Existenz eines Portfolios, dessen Errichtung zu Beginn kein Kapital erfordert, und das bis zur Fälligkeit garantiert keinen Verlust macht, aber mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn abwirft.

In einem (fiktiven) idealen Markt verbreitet sich Information so schnell, dass Arbitrage im Nu erkannt wird und wegen des Mechanismus “Angebot und Nachfrage” schnell verschwindet.

General-Annahme: Es gibt keine Arbitrage! (*no-arbitrage principle*)

weitere Annahmen:

- 1.) Zinseszins-Verzinsung (Faktor e^{rT})
- 2.) Kreditzins = Guthabenzins

Beweis von $F = S_0 e^{rT}$:

1. Annahme $F > S_0 e^{rT}$.

Dann gibt es eine Arbitrage-Strategie wie folgt:

$t = 0$: leihe S_0 zur Zinsrate r ,
 kaufe den Handelsgegenstand,
 schließe Forward-Kontrakt ab, wonach für $t = T$
 der Gegenstand zum Preis F verkauft wird.

$t = T$: verkaufe gemäß Vertrag: $+F$
 zahle Kredit zurück: $-S_0 e^{rT}$
 Ergebnis $F - S_0 e^{rT} > 0$,
 d.h. risikofreier Gewinn, also Arbitrage!

Widerspruch zum No-Arbitrage-Prinzip. $\Rightarrow F \leq S_0 e^{rT}$

2. Annahme $F < S_0 e^{rT}$.

$t = 0$: Besitzer des Handelsgegenstandes verkaufen ihn: $+S_0$
 (Nicht-Besitzer: Leerverkauf)
 lege S_0 an zum Zinssatz r ,
 und steige in Forward-Kontrakt ein, den Gegenstand
 zum Preis F zu kaufen.

$t = T$: vom Vertrag: $-F$
 von Geldanlage: $+S_0 e^{rT}$
 Ergebnis $S_0 e^{rT} - F > 0$ also Arbitrage

Widerspruch! $\Rightarrow F \geq S_0 e^{rT}$

3. Zusammen: $F = S_0 e^{rT}$

Bemerkungen:

- 1.) bei anderer Verzinsung: analog
- 2.) bei zwei Zinssätzen: $r_{\text{kredit}}, r_{\text{guthaben}}$, erhalte $F \leq S_0 e^{r_{\text{kr}} T}; F \geq S_0 e^{r_{\text{gut}} T}$;
 also: $S_0 e^{r_{\text{gut}} T} \leq F \leq S_0 e^{r_{\text{kr}} T}$

C. Zins

Es sei $N(t)$ der Zeitwert einer Geld-Anlage. Bei

$$N(t + \Delta t) - N(t) = r(t, \Delta t) N(t) \Delta t$$

ist $r(t, \Delta t)$ die Zinsrate zum Zeitpunkt t mit Anlagedauer Δt . Der **Diskontierungsfaktor** für einen Anlagezeitraum von t bis T ist

$$Z_r(t, T) := \frac{N(t)}{N(T)}$$

Für zeitstetige Betrachtung ($t \in \mathbb{R}$) und integrierbare Momentan-Zinsrate r folgt mit $\Delta t \rightarrow 0$:

$$N(T) = N(t) \exp \int_t^T r(x) dx$$

Im Spezialfall r konstant bzgl. t (wird hier angenommen) folgt

$$Z(t, T) = e^{-r(T-t)}.$$

risikofreier Zins: Wenn die Anleihe risikofrei ist, dann nennt man r “risikofreie” Zinsrate.

Z wird aus Marktdaten gewonnen, speziell von Anleihen welche keinen Koupon auszahlen (*zero-bond*), daraus dann $r(t, T - t)$.

Für das Folgende sei verabredet:

r meint immer den zum jeweiligen Anlagehorizont $T - t$ passenden risikofreien Zins.

LITERATUR

zur Numerik, und zu dieser Vorlesung:

R. Seydel: Tools for Computational Finance. 4th Ed., Springer, Berlin 2009

In diesem Buch ist der Inhalt der Vorlesung ausführlicher erklärt, versehen mit Literaturangaben und Ergänzungen, alles in der für dieses Gebiet entscheidenden Sprache Englisch.

Jede Studentin und jeder Student sollte sich als Grundlage für eine einschlägige berufliche Arbeit weiteres Finanzwissen aneignen!

Hintergrundwissen zu Derivaten:

J.C. Hull: Options, Futures, and Other Derivates. Prentice Hall.

Weitere Spezial-Literatur zu einzelnen Themen wird in den jeweiligen Kapiteln angegeben.

D. Praxis

Fälligkeit immer am 3. Freitag im Monat. Deswegen wird nur der Monat angegeben. Die Quartalsmonate sind März, Juni, September, Dezember ($\rightarrow$ Hexensabbat).

Bei Optionen werden *Kontrakte* gehandelt, d.h. im allgemeinen eine Option auf jeweils 100 Stück des Underlyings. Es gibt nur wenige Ausnahmen: SAP, Allianz, Münchner Rück.

An der Eurex sind Optionen auf Aktien immer vom amerikanischen Typ, solche auf Indices sind vom europäischen Typ.

Optionen auf Indices dotieren nicht auf Euro, sondern auf Punkte.

Unterschied DAX/Eurostoxx: Der DAX ist ein *performance* index, in dem auch Dividenden berücksichtigt werden. Dagegen ist der Eurostoxx ein *Preis*-Index (ohne Dividenden), ebenso der Dow Jones.

(Standard-)Optionen sind hoch-standardisierte Produkte, die an Börsen angeboten werden. Auf Grund der hohen Standardisierung (Underlying, Typ, Strike K , Laufzeit T) haben sie keine Wertpapierkennnummer (WKN). So ist etwa die Diskretisierungsstufe im Strike klar und einheitlich geregelt. Der Halter kann auch als Emittent auftreten (short).

Optionsscheine (*warrants*) dagegen werden von Banken und Unternehmen begeben, die Besitzer des Underlying sind. Die Optionsscheine können individuell gestaltet sein und sind Wertpapiere (mit WKN). Der Emittent bestimmt den Preis, gehandelt werden diese z.B. bei der Euwax, am Kassamarkt nur long Positionen [auch Zertifikate am Kassamarkt].

Was passiert, wenn eine Option ausgeübt wird? Wo kommen die Aktien her? Das wird alles vom *Market Maker* organisiert. Es werden Aktien genommen, die auf dem Markt gerade angeboten werden! Auswahl: zuerst wird mit einem Zufallsgenerator ein Broker ausgewählt. Bei dem gewählten Broker steht ein weiterer Zufallsgenerator, der dann einen Kunden mit passendem Aktien-Angebot auswählt. Es wird eher selten wirklich ausgeübt; angeblich nimmt der Market Maker rückverkaufte Optionen auch wieder vom Markt. Bei manchen risikoträchtigen Optionen und Optionsstrategien werden *Margins* verlangt.

Arbitrageure/Profis zahlen praktisch “keine” Gebühren.

Es gibt vier Positionen: long call, short call, long put, short put.

long call	=	Kauf einer Kaufoption
short call	=	Verkauf einer Kaufoption
long put	=	Kauf einer Verkaufsoption
short put	=	Verkauf einer Verkaufsoption
(am Kassamarkt gibt es solches Produkt: die Aktienanleihe)		

Innerer Wert: call: $(S - K)^+$, put: $(K - S)^+$ (für $t \leq T$)
(oft auch $S - K$ bzw. $K - S$, d.h. kann negativ werden)

Zeitwert

Preis der Option abzüglich |innerem Wert|.

in the money: innerer Wert positiv

out of the money: wenn kein innerer Wert

Der Zeitwertverlust ist besonders drastisch zum Ende der Laufzeit.

Die **Volatilität** ist hoch bei starken Kursbewegungen.

kurze Laufzeiten: etwa 1 – 2 Monate

“lange” Laufzeiten: 3 – 6 Monate, oder länger

Internet

www.boerse-frankfurt.com (dort z.B. Aktien/Realtime)

www.eurexchange.com (dort z.B. /education/tools.)

www.boerse.de (dort z.B. eurex)

www.compfin.de (zu Computational Finance)

www.onvista.de (aktuelle Daten)