

1. Modellierung von Finanzoptionen

1.1 Optionen

Definition (Option)

Eine *Option* ist das *Recht* (nicht aber die Verpflichtung) ein risikobehaftetes *Asset* zu einem spezifizierten Preis K bis zu einem Fälligkeitszeitpunkt T zu kaufen (“Call”) oder zu verkaufen (“Put”).

Typische Assets sind u.a. Aktien, Indices, oder Rohstoffe. Die Option ist ein Vertrag über ein Geschäft, dessen Bedingungen vom Emittenten festgelegt werden (engl. *writer*). Der Erwerber der Option heißt *Halter*; er zahlt bei Erwerb der Option eine Prämie V .

Das Realisieren der Option, d.h. das Kaufen bzw. Verkaufen des *underlying* Asset unter Verwendung des Options-Vertrages heißt ausüben (*exercise*).

Frage: Was ist der faire Preis V ?

Er hängt ab von K, T, S_0 , sowie von weiteren Marktdaten, wie dem Zinssatz r und der Volatilität σ .

Begriffe

Die *Volatilität* σ ist ein Maß für die Schwankungsbreite des Aktienkurses S_t und damit für das Risiko.

T : Laufzeit der Option, *maturity date*, Fälligkeitsdatum

K : Ausübungspreis, *strike*, *exercise price*

Eine *europäische* Option darf nur am Ende der Laufzeit ($t = T$) ausgeübt werden, eine *amerikanische* Option zu jedem Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$.

Beispiel (Option auf den DAX)

Angenommenes Szenario: Ein Anleger besitzt “heute” (10.04.2007; DAX 7166 Punkte) ein Depot mit deutschen Standardaktien. Bei einem DAX-Wert von 7000 ist das Depot rund 100000 Euro wert. Der Anleger will sein Portfolio gegen Wertverlust absichern. (“Wertverlust” im Sinne $\text{DAX} < 7000$)

Der Markt bietet am 10.04.2007 laut FTD folgenden Put auf den Dax an:

Emittent:	(z.B.) BNP Paribas
Laufzeit:	20.06.2008
Ausübungs“preis” K :	7000 Punkte
Preis V :	3.26 Euro pro Put

Der Emittent zahlt pro DAX-Punkt unter 7000 einen Cent. (Falls der DAX-Wert etwa auf 6000 sinken würde, bekäme der Halter eines Put bei Ausübung 10 Euro.) Zur Sicherung

seines Portfolios kauft der Anleger 1428 solcher Puts. (Warum 1428 ?) Bei dem Putpreis von 3.26 Euro kostet die Absicherung des Portfolios etwa 4700 Euro.

Zurück zur Frage: Was ist der Wert von V ?

Ein Aspekt ist leicht zu beantworten, nämlich der *Wert der Option zur Fälligkeit*: **Auszahlungsfunktion** (*payoff*).

1. Call in $t = T$

Der Halter der Option hat zwei Alternativen, wenn er die Aktie (Asset) erwerben will:

- (a) Er kauft sie am Markt (an der Börse) und zahlt S_T , oder
- (b) er “kauft” sie durch Ausüben der Option und zahlt K .

Je nach Marktlage sucht der rationale Halter die bessere Alternative aus.

1. Fall: $S_T \leq K \Rightarrow$ Der Halter kauft am Markt, zahlt S_T und lässt Option verfallen. Dann ist die Option wertlos, also $V = 0$.

2. Fall: $S_T > K \Rightarrow$ Der Halter kauft durch Ausüben und zahlt K . Er kann sie sofort am Markt zum Preis S_T verkaufen. Gewinn: $S_T - K$, also $V = S_T - K$.

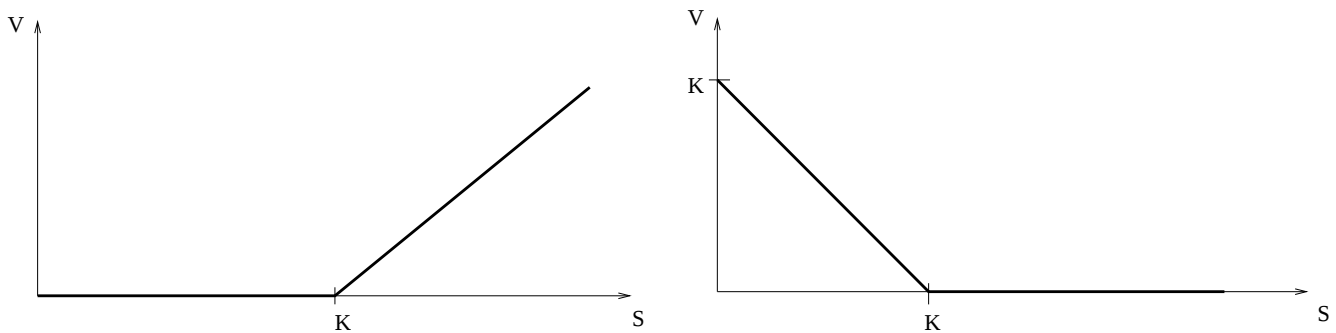
Somit gilt für den Wert des Call zur Fälligkeit T :

$$\begin{aligned} V(S_T, T) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } S_T \leq K \\ S_T - K & \text{falls } S_T > K \end{cases} \\ &= \max \{S_T - K, 0\} \\ &=: (S_T - K)^+ \end{aligned}$$

2. Put in $t = T$

Hier führen analoge Überlegungen zu

$$\begin{aligned} V(S_T, T) &= \begin{cases} K - S_T & \text{falls } S_T \leq K \\ 0 & \text{falls } S_T > K \end{cases} \\ &= \max \{K - S_T, 0\} \\ &=: (K - S_T)^+ \end{aligned}$$



Auszahlungsfunktion eines Call (links) und eines Put (rechts) in $t = T$.

Schwierig ist es, den Wert V für $t < T$, insbesondere für $t = 0$, zu bestimmen. Eine zentrale Rolle spielt hier das *No-Arbitrage-Prinzip*. Allein auf Grund dessen lassen sich elementare **Schranken für V** herleiten. Es folgen einige Beispiele.

Der Wert $V(S, t)$ einer amerikanischen Option kann niemals kleiner als die Auszahlungsfunktion sein, denn (Beweis für Put; Call analog):

Offensichtlich gilt $V \geq 0$ für alle S . *Annahme:* Es sei $S < K$ und $0 \leq V < K - S$. Konstruiere nun die folgende Arbitrage-Möglichkeit:

Kaue das Asset ($-S$) und den Put ($-V$), und übe den Put sofort aus, d.h. verkaufe das Asset ($+K$). Wegen $K > S + V$ ergibt das einen risikolosen Gewinn $K - S - V > 0$. Widerspruch zum No-Arbitrage-Prinzip.

Es gilt also

$$V_{\text{Put}}^{\text{am}}(S, t) \geq (K - S)^+ \quad \forall S, t.$$

Analog:

$$V_{\text{Call}}^{\text{am}}(S, t) \geq (S - K)^+ \quad \forall S, t.$$

Zudem gilt

$$V^{\text{am}} \geq V^{\text{eu}},$$

weil eine amerikanische Option die Möglichkeiten einer europäischen Option beinhaltet.

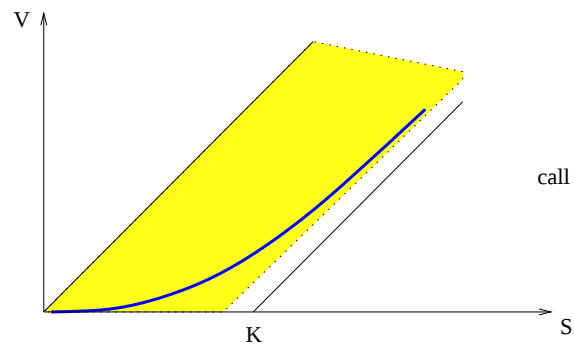
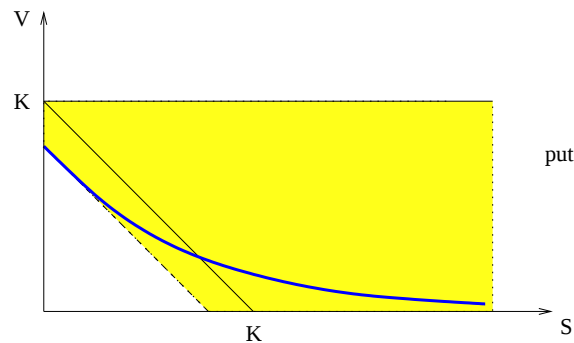
Speziell gilt für europäische Optionen auf ein während der Laufzeit dividendenloses Asset die **Put-Call-Parität**:

$$S + V_{\text{Put}} = V_{\text{Call}} + Ke^{-r(T-t)} \quad (\text{vgl. Übungsaufgaben})$$

Hieraus können weitere Folgerungen getroffen werden, wie z.B.

$$V_{\text{Put}}^{\text{eu}} \geq Ke^{-r(T-t)} - S.$$

Die folgende Grafik fasst diese a-priori-Schranken für europäische Optionen auf dividendenlose Assets zusammen (für $r > 0$).



Definition (historische Volatilität)

Die historische Volatilität σ ist die Standardabweichung von S_t . Da sie mit Returns in Zeitintervallen Δt ermittelt wird, wird skaliert mit $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$ (Erklärung in Abschnitt 1.5).

In der Praxis ist σ nicht konstant, wird aber im klassischen Black-Scholes-Modell als konstant angenommen. Die Ermittlung von Markt-konsistenten Parameterwerten (wie σ) ist i.A. anspruchsvoll. (“Kalibrierung”)

Bisher haben wir den Payoff für europäische Optionen mittels S_T bestimmt. Die gleiche Argumentation gilt auch für amerikanische Optionen für beliebiges $t \leq T$: Die Payoffs sind

$$\text{Put: } (K - S_t)^+$$

$$\text{Call: } (S_t - K)^+$$

Hinweis zum Verständnis:

Bei jeder Option sind *drei Preise* gekoppelt: der Preis S_t des zugrunde liegenden Asset, der Strike-Preis K und der Preis V der Option.

Definition

Die Optionstypen mit den oben angegebenen Payoffs auf ein einzelnes Asset heißen *Standard-Optionen*, engl. *Vanilla-Options*. Es gibt noch viele andere Arten von Optionen mit anderen Modalitäten. Diese anderen Typen von Optionen heißen *exotisch*.

Beispiele für exotische Optionen

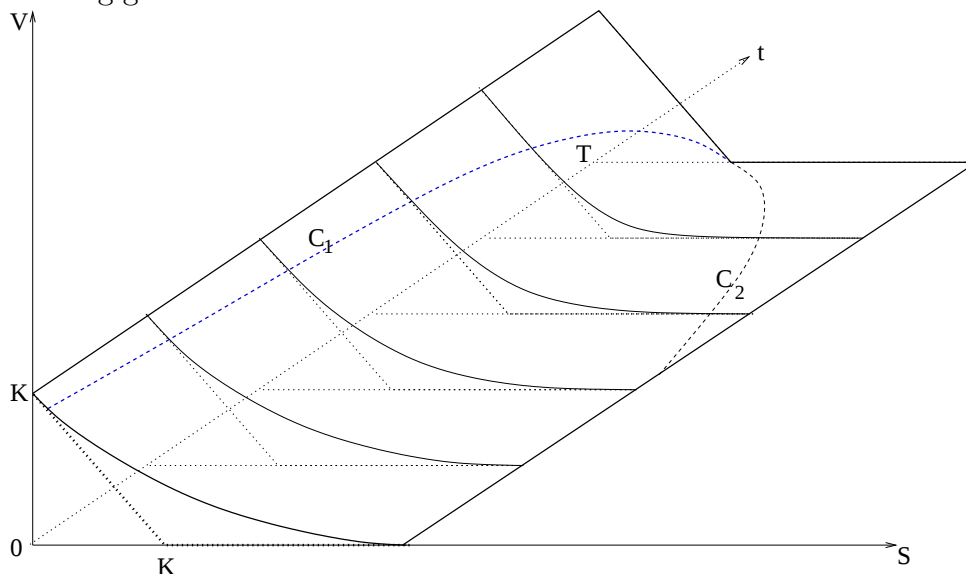
Basket: Das Underlying ist ein “Korb” bestehend aus *mehreren* Assets, z.B. $\sum_{i=1}^m w_i S_i(t)$, wobei S_i der Marktpreis des i -ten Asset ist, $m > 1$.

Barrier: Option wird wertlos, wenn S_t eine festgelegte “Barriere” B über- oder unterschreitet.

Option mit anderen Payoffs: z.B. *Binär*-Put mit

$$\text{Payoff} = \begin{cases} 0 & \text{falls } S_t > K \\ 1 & \text{falls } S_t \leq K. \end{cases}$$

Pfadabhängigkeit: z.B. Payoff: $(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K)^+$. Mittelwert hängt vom Pfad, d.h. vom Verlauf $S(t)$ auf einem Intervall ab (*average price call*). Auch eine Barrier-Option ist pfadabhängig.

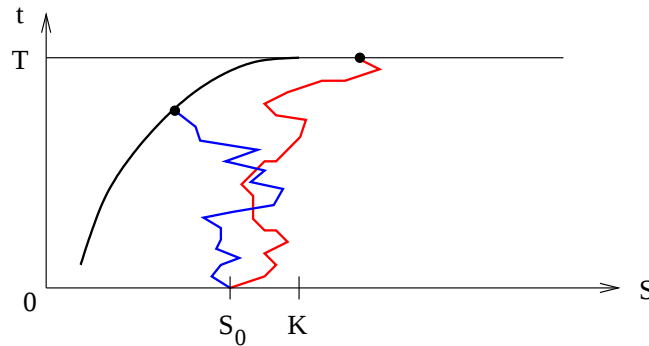


Zur Geometrie der Optionen (Ausblick, Begründungen i.W. in Kapitel 4)

(hier amerikanischer Put)

$V(S, t)$ kann (unter geeigneten Voraussetzungen) als Fläche über dem Halbstreifen $0 \leq t \leq T$, $S > 0$ interpretiert werden. Dieses $V(S, t)$ heißt *Wertfunktion*. Die Fläche $V(S, t)$ mündet bei amerikanischen Optionen (Bild) in der *early-exercise-curve* C^1 -glatt in die Ebene ein, welche durch den Payoff definiert ist.

Bedeutung: Wenn der Marktpreis S_t diese Kurve C_1 erreicht, ist vorzeitiges/sofortiges Ausüben optimal. Ansicht von “oben” auf die Entscheidungsebene (Fall eines Put, keine Dividendenzahlung):



Die early-exercise Kurve ist zunächst unbekannt und muss numerisch berechnet werden.

1.2 Mathematische Modelle

A. Black-Scholes-Markt

Wir betrachten nun mathematische Modelle für die Entwicklung von S_t . Hierzu listen wir eine Reihe von Annahmen auf, welche i.W. auf Black, Scholes und Merton (1973, Nobel-Preis 1997) zurück gehen. Diese klassischen Annahmen führen zu einer partiellen DGL, nämlich der berühmten **Black-Scholes-Gleichung**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0$$

Diese ist ein Symbol für die gesamte klassische Theorie. Jede Lösung $V(S, t)$ muss für $t = T$ der Endbedingung $V(S, T) = \Psi(S)$ genügen, wobei Ψ den Payoff definiert. (Beispiel Put: $\Psi(S) = (K - S)^+$)

Annahmen des Modells

1. Es gibt keine Arbitragemöglichkeiten.
2. Der Markt ist “reibungslös”. Das bedeutet: Gebühren und Steuern entfallen, Guthaben- und Kreditzinsen sind gleich. Zudem seien alle Werte beliebig oft teilbar (d.h. $\in \mathbb{R}$). Ein Kauf oder Verkauf beeinflusst den Marktpreis nicht.
3. Der Marktpreis folge einer geometrisch Brownschen Bewegung (Erklärung später).
4. Technische Annahmen:

r und σ sind konstant für $0 \leq t \leq T$.

Es werden in $0 \leq t \leq T$ keine Dividenden gezahlt.

(Einige dieser Annahmen können abgeschwächt werden.)

Es kann gezeigt werden, dass unter diesen Annahmen die Wertfunktion $V(S, t)$ einer *europäischen* Option der Black-Scholes-Gleichung genügt. Also ist ein möglicher numerischer Zugang für eine europäische Option derjenige, der die Black-Scholes-Gleichung löst. Es gibt eine analytische Lösung; sie ist am Ende dieses Kapitels aufgeführt (dort ist δ eine kontinuierliche Dividendenrate).

Das obige Modell des Finanzmarktes ist der klassische Zugang, es gibt jedoch auch andere Marktmodelle. Das Modell mit seiner geometrisch Brownschen Bewegung (Abschnitt 1.5) ist *zeitstetig*, d.h. $t \in \mathbb{R}$.

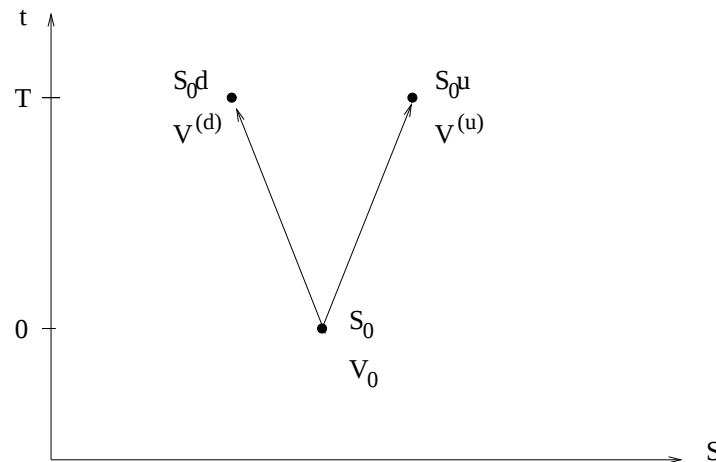
Es gibt auch *zeitdiskrete* Modelle des Marktes. Diese lassen nur eine diskrete Auswahl von Zeitpunkten zu. Solche zeitdiskreten Modelle betrachten wir hier i.W. nicht. Andere Marktmodelle sind zwar zeitstetig, verwenden aber die geometrisch Brownsche Bewegung nicht. Solche Modelle sind z.B. Sprungmodelle. (Literatur zu zeitdiskreten Modellen z.B. [J.Kremer: Einführung in die diskrete Finanzmathematik]; Literatur zu Sprungmodellen z.B. [R.Cont, P.Tankov: Financial Modelling with Jump Processes])

Numerische Aufgaben:

- Berechnung von $V(S, t)$ insbesondere für $t = 0$,
- Berechnung der Sensitivitäten (“Griechen”), wie $\frac{\partial V(S, 0)}{\partial S}$,
- Kalibrierung, d.h. Berechnung von Parametern der Modelle durch Anpassung an Marktdaten.

B. Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten (Ein-Perioden-Modell)

Annahmen:



Es existieren nur zwei Zeitpunkte: $0, T$, und nur zwei mögliche zukünftige Aktienpreise S_0^d, S_0^u . V_0 sei der (noch unbestimmte) Wert der Option “heute” für $t = 0$, und es sei S_0 der heutige Wert der Aktie. Betrachte ein Portfolio mit zwei Posten:

1. Δ viele Stücke der Aktie
2. eine emittierte (verkaufte) Option auf diese Aktie

Für den Wert Π_0 des Portfolios zum Zeitpunkt 0 gilt

$$\Pi_0 = S_0 \Delta - V_0.$$

Δ ist noch offen. Zum Zeitpunkt T kann der Wert des Underlyings gestiegen (*up*) oder gefallen (*down*) sein. Also gilt für die Entwicklung des Portfolios in $t = T$

$$\Pi^{(u)} = S_0 u \Delta - V^{(u)}$$

$$\Pi^{(d)} = S_0 d \Delta - V^{(d)}$$

mit $0 < d < u$. $V^{(u)}$ und $V^{(d)}$ sind durch den Payoff bekannt. Wähle nun Δ so, dass das Portfolio in T risikolos ist, d.h. der Portfoliowert soll gleich sein, egal ob der Marktpreis “up” oder “down” geht,

$$\Pi^{(u)} = \Pi^{(d)} =: \Pi_T.$$

Somit gilt

$$S_0 \Delta (u - d) = V^{(u)} - V^{(d)}$$

$$\text{oder } \Delta = \frac{V^{(u)} - V^{(d)}}{S_0 u - S_0 d}.$$

Dieser spezielle Wert von Δ stellt das Portfolio risikofrei. Mit dem No-Arbitrage-Prinzip folgt nun:

Eine andere risikofreie Anlage muss den gleichen Wert haben, denn anderenfalls würden Arbitrageure die eine Anlage gegen die andere tauschen. Also: $\Pi_T = \Pi_0 e^{rT}$

Nach elementarer Zwischenrechnung ergibt dies

$$V_0 = e^{-rT} \left(V^{(u)} q + V^{(d)} (1 - q) \right)$$

mit $q := \frac{e^{rT} - d}{u - d}$. Dies hat die Struktur eines Erwartungswertes. Wenn $q \in (0, 1)$ (benötige hierzu $d \leq e^{rT} \leq u$), dann wird durch dieses q eine Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Q}$ induziert. Also gilt:

$$V_0 = e^{-rT} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[V_T]$$

(Denn in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$ gilt

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X] = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{P}(X = x_i),$$

wobei X eine Zufallsvariable ist.) Die oben definierte spezielle Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Q}$ heißt **risikoneutrale Wahrscheinlichkeit**. Für S_0 ergibt sich

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_T] = \underbrace{\frac{e^{rT} - d}{u - d}}_{=q} S_0 u + \underbrace{\frac{u - e^{rT}}{u - d}}_{=1-q} S_0 d = S_0 e^{rT}.$$

Also gilt auch

$$S_0 = e^{-rT} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_T].$$

Zusammenfassung:

Falls das Portfolio risikofrei ist (erreicht durch obigen speziellen Wert von Δ) und $0 < q < 1$ mit $q = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$, gibt es eine Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Q}$, so dass

$$V_0 = e^{-rT} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[V_T] \quad \text{und}$$

$$S_0 = e^{-rT} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_T].$$

Die Größe Δ (= Stückzahl welche das Portfolio risikofrei stellt) heißt *Delta*. Später wird sich zeigen, dass im zeitstetigen Fall $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ gilt. Dies ist das erste und wichtigste Beispiel der “Greeks”, weitere sind $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \dots$.

Δ ist der Schlüssel zum “*Delta-Hedgen*”, d.h. Risikobegrenzung oder Eliminierung des Risikos des Emittenten einer Option, und ist von großer Bedeutung für die Praxis.

Bemerkung

Die Eigenschaft

$$e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T] = S_0$$

für alle T ist die *Martingaleigenschaft* des diskontierten Prozesses $e^{-rt}S_t$ bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$.

1.3 Binomial-Methode

Wir möchten nun Optionen im zeitstetigen Fall bewerten. Für eine numerische Näherung muss allerdings in irgendeiner Weise diskretisiert werden. Unter den vielen möglichen Zugängen ist die Klasse der *Baum-Methoden* die einfachste und robusteste. Bei diesen Methoden ist das Diskretisierungsgitter *baumartig*. Der einfachste Fall einer Baum-Methode ist der Binomial-Baum. Das Black-Scholes-Modell ergibt sich hier im Grenzübergang mit Feinheit $\rightarrow 0$.

Definiere folgende äquidistante Zeit-Diskretisierung:

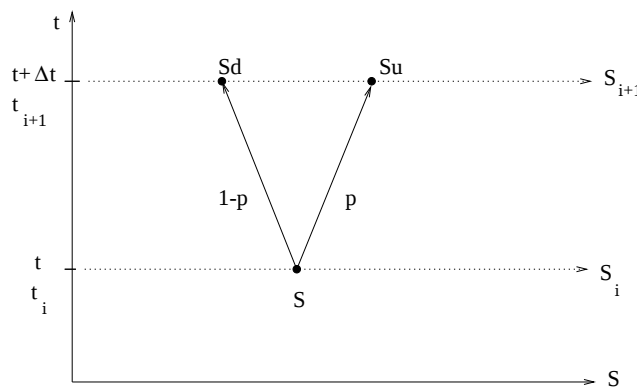
M : Anzahl der Zeitschritte

$$\Delta t := \frac{T}{M}$$

$$t_i := i \cdot \Delta t, \quad i = 0, \dots, M$$

$$S_i := S(t_i)$$

Auf den S_i -Achsen werden im Folgenden diskrete S_{ji} -Werte eingeführt.



Annahmen

(Bi1) Der Marktpreis S über eine Periode Δt kann nur 2 Zustände annehmen:

Su oder Sd mit $0 < d < u$.

(Bi2) Die Wahrscheinlichkeit der Bewegung “up” sei p , d.h. $P(\text{up}) = p$.

(Bi3) Die Mittelwerte und Varianzen sollen identisch zu denjenigen des zeitstetigen Modells sein.

(Bi1) und (Bi2) definieren den Rahmen eines Binomialprozesses. Die Parameter u, d, p sind zunächst frei und sollen nun so bestimmt werden, dass sich die gewünschten Eigenschaften ergeben.

Bemerkungen

1. *Hier* (in (Bi2),(Bi3)) ist mit P die spezielle künstliche risikoneutrale Bewertung Q gemeint. Literatur zu dem stochastischen Hintergrund: [Musielà&Rutkowski: Martingale Methods in Financial Modelling], [Shreve: Stochastic Calculus for Finance II (Continuous-time models)].
2. Für das zeitstetige Black-Scholes-Modell gilt (Beweis unten in Abschnitt 1.5D):

$$\begin{aligned} E[S_t] &= S_0 e^{r(t-t_0)} \\ E[S_t^2] &= S_0^2 e^{(2r+\sigma^2)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

3. Die Erwartungswerte sind bedingte Erwartungswerte, denn $S(t_0)$ muss jeweils gleich dem Anfangswert sein.

Folgerung

$$\begin{aligned} E[S_{i+1}|S(t_i) = S_i] &= S_i e^{r\Delta t} \\ \text{Var}[S_{i+1}|S(t_i) = S_i] &= S_i^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) \end{aligned}$$

Zunächst die Mittelwerte: Im diskreten Modell gilt

$$E[S_{i+1}] = p S_i u + (1 - p) S_i d.$$

Durch Gleichsetzen der Erwartungswerte des diskreten und des stetigen Modells erhält man

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d.$$

Dies ist die erste Gleichung für die 3 Unbekannten u, d, p . Es folgt

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Wegen $0 \leq p \leq 1$ muss gelten

$$d \leq e^{r\Delta t} \leq u.$$

(Vergleich mit Abschnitt 1.2B zeigt: Dies p ist das q und repräsentiert die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit.) Aus den Varianzen ergibt sich die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} \text{Var}[S_{i+1}] &= E[S_{i+1}^2] - (E[S_{i+1}])^2 \\ &= p (S_i u)^2 + (1 - p) (S_i d)^2 - S_i^2 (pu + (1 - p)d)^2 \\ &\stackrel{!}{=} S_i^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = pu^2 + (1 - p)d^2.$$

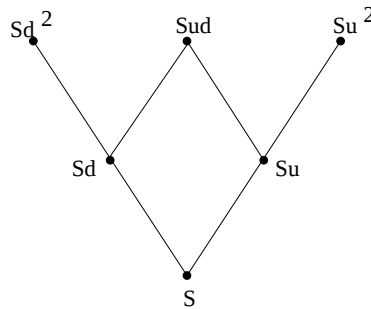
Eine dritte Gleichung kann willkürlich formuliert werden, etwa im Hinblick auf die Ökonomie der Rechnung, z.B.

$$u \cdot d = 1.$$

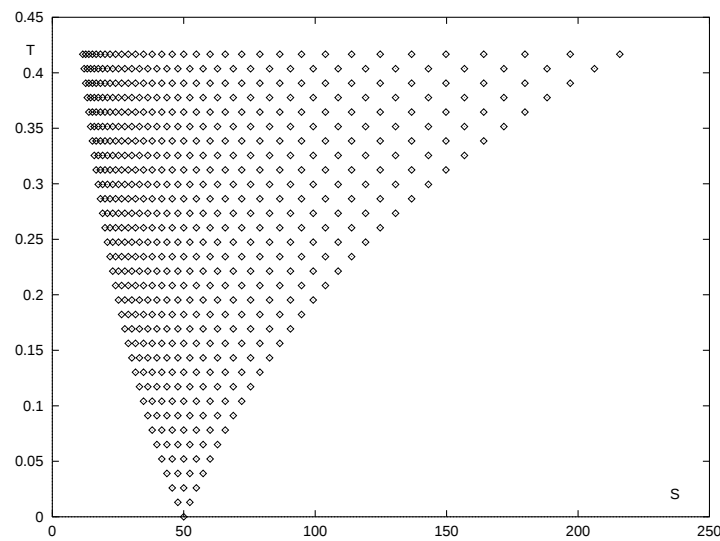
Als Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems für u, d, p erhält man

$$\begin{aligned}\beta &:= \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}) \\ u &= \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \\ d &= 1/u = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\end{aligned}$$

Das resultierende Gitter hat die Struktur eines rekombinierenden Baumes.



Wegen $S_{i+1} = \alpha S_i$, $\alpha \in \{u, d\}$ liegt exponentielles Wachstum der “Äste” des Baumes vor.



Die Gitterpunkte sind also definiert durch

$$S_{j,i} := S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0, \dots, i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Anwendung/Ausführung

Für $t_M = T$ ist der Wert der Option durch die Auszahlungsfunktion bekannt.

Call: $V(S(t_M), t_M) = \max\{S(t_M) - K, 0\}$, also

$$V_{j,M} := (S_{j,M} - K)^+$$

Put: $V(S(t_M), t_M) = \max\{K - S(t_M), 0\}$, also

$$V_{j,M} := (K - S_{j,M})^+$$

Aufbauend auf dem Prinzip, welches oben für das Ein-Perioden-Modell hergeleitet wurde, gilt

$$V_i = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}[V_{i+1}]$$

oder mit Matrixnotation

$$V_{j,i} = e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) .$$

Diese zentrale Beziehung (Anwendung des Ein-Perioden-Modells auf jede “Masche” des Baums) ist eine *Rekursion*, welche rückwärtslaufend von t_M anfangend die V -Bewertungen auf dem ganzen Baum berechnet, bis hin zu $V_0 := V_{0,0}$.

Im Falle der *amerikanischen* Option muss bei jeder Masche geprüft werden, ob vorzeitiges Ausüben sinnvoll ist. Der Halter der Option optimiert seine Position nach Vergleich von Payoff $\Psi(S)$ und *Haltewert*: er wählt den jeweils größeren Wert. Obige Rekursion muss also wie folgt modifiziert werden: (cont für continuation value = Wert, wenn nicht ausgeübt wird)

$$V_{j,i}^{\text{cont}} := e^{-r\Delta t} (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})$$

Für europäische Optionen gilt $V_{j,i} := V_{j,i}^{\text{cont}}$, und für amerikanische Optionen $V_{j,i} := \max\{\Psi(S_{j,i}), V_{j,i}^{\text{cont}}\}$. Konkret:

$$\text{Call: } V_{j,i} := \max\{(S_{j,i} - K)^+, V_{j,i}^{\text{cont}}\}$$

$$\text{Put: } V_{j,i} := \max\{(K - S_{j,i})^+, V_{j,i}^{\text{cont}}\}$$

(Prinzip der Dynamischen Programmierung)

Algorithmus (Binomial-Methode, Grundversion)

Input: $r, \sigma, S = S_0, T, K$, Put oder Call,
europäisch oder amerikanisch, M
berechne: $\Delta t := T/M, u, d, p$ wie oben definiert
 $S_{0,0} := S_0$
 $S_{j,M} = S_{0,0}u^j d^{M-j}, j = 0, 1, \dots, M$
(für amerikanische Optionen zusätzlich $S_{j,i} = S_{0,0}u^j d^{i-j}$
für $0 < i < M, j = 0, 1, \dots, i$)
 $V_{j,M}$ aus dem Payoff
 $V_{j,i}$ für $i < M$ nach europäischer/amerikanischer Formel
Output: $V_{0,0}$ ist Näherung für $V(S_0, 0)$

Verbesserung zur Beseitigung von Oszillationen: z.B. $ud = \gamma$ mit γ so, dass für $t = T$ ein Knoten auf den Strike fällt.

Vorteile der Methode

- leicht zu implementieren
- Allgemeinere Typen von Optionen (z.B. mit Dividendenzahlungen oder exotische Optionen) lassen sich relativ leicht realisieren.
- robust

Nachteile der Methode

- Genauigkeit ist eher bescheiden:
Fehler $\mathcal{O}(1/M) = \mathcal{O}(\Delta t)$, d.h. lineare Konvergenz. Die Genauigkeit passt aber i.A. zur Praxis.
- Falls V_0 für mehrere Werte von S_0 benötigt wird, muss der Algorithmus entsprechend oft neu gestartet werden.

Probleme

Nicht nur bei Baummethoden: Im höher-dimensionalen Fall (z.B. Basket-Option mit 3 oder 4 Aktien) stellt sich die Frage, wie der Baum zu verallgemeinern ist.

Literatur: z.B. [J.C. Hull: Options, Futures & Other Derivatives]

Weiterentwicklungen: Trinomialmethode, "implizite Gitter"

1.4 Stochastische Prozesse

Dieser Abschnitt dient als Grundlage für die zeitstetigen Modelle, wie z.B. dasjenige von Black, Scholes und Merton.

i.W. (geometrisch) Brownsche Bewegung

Vorgeschichte

Brown (1827): engl. Botaniker, beschrieb Bewegung von Pollen.

Bachelier (1900): verwendete Brownsche Bewegung, um Aktienkurse zu modellieren.

Einstein (1905): Molekularbewegung

Wiener (1923): mathematisches Modell

seit 1940: Itô und andere

Definition (Stochastischer Prozess)

Ein *Stochastischer Prozess* ist eine Familie von Zufallsvariablen X_t für $t \geq 0$ oder $0 \leq t \leq T$.

D.h. jedem Zufallsexperiment ist eine Funktion X_t zugeordnet. Die resultierende Funktion X_t heißt *Pfad* oder *Trajektorie*.

Definition (Wiener-Prozess / Standard Brownsche Bewegung)

W_t (oder $W(t)$ oder W) hat die Eigenschaften:

- (a) W_t ist ein *stetiger* stochastischer Prozess
- (b) $W_0 = 0$

(c) $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

(d) Alle Inkremente $\Delta W_t := W_{t+\Delta t} - W_t$ (Δt beliebig) auf nicht überlappenden t -Intervallen sind *unabhängig*.

(c) bedeutet: W_t ist normalverteilt mit $\mathbb{E}[W_t] = 0$ und $\text{Var}[W_t] = \mathbb{E}[W_t^2] = t$.

Bemerkungen

- 1) “Standard”, weil als skalar angenommen, $W_0 = 0$, und kein Drift zugelassen ist.
 $X_t = a + \mu t + W_t$ mit $a, \mu \in \mathbb{R}$ wäre eine allgemeinere Brownsche Bewegung (mit Drift μ).
- 2) Folgerung (auch für $W_0 = a$):

$$\mathbb{E}[W_t - W_s] = 0, \quad \text{Var}[W_t - W_s] = t - s \quad \text{für } t > s.$$

vgl. Übungsaufgaben.

- 3) W_t ist nirgendwo differenzierbar! Motivation:

$$\text{Var} \left[\frac{\Delta W_t}{\Delta t} \right] = \frac{1}{(\Delta t)^2} \text{Var}[\Delta W_t] = \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 \cdot \Delta t = \frac{1}{\Delta t}$$

würde für $\Delta t \rightarrow 0$ gegen ∞ gehen.

- 4) Ein Wiener-Prozess ist *selbst-ähnlich* im Sinne:

$$W_{\beta t} \stackrel{d}{=} \sqrt{\beta} W_t$$

(beide Seiten genügen der gleichen Verteilung). Allgemeiner gibt es fraktale Wiener-Prozesse mit

$$W_{\beta t} \stackrel{d}{=} \beta^H W_t,$$

für den normalen Wiener-Prozess ist $H = \frac{1}{2}$. H heißt *Hurst-Exponent*. Mandelbrot postuliert, dass Finanzmodelle fraktale Prozesse verwenden sollten.

Zur Bedeutung

Der Wiener-Prozess ist Kern (“driving force”) wichtiger Finanzmodelle.

Diskretisierung/Berechnung

Bisher haben wir W_t für zeitstetige Modelle ($t \in \mathbb{R}$) betrachtet, und wollen nun W durch eine Diskretisierung approximieren. Es sei $\Delta t > 0$ ein festes Zeit-Inkrement.

$$t_j := j \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad W_{j\Delta t} = \sum_{k=1}^j (W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t}) = \sum_{k=1}^j \Delta W_k$$

Die ΔW_k sind unabhängig und haben wegen Bemerkung 2 die Eigenschaften

$$\mathbb{E}(\Delta W_k) = 0, \quad \text{Var}(\Delta W_k) = \Delta t.$$

Falls Z eine Zufallsvariable ist mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ [vgl. Kap.2], so gilt

$$Z\sqrt{\Delta t} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

$\Rightarrow \Delta W_k = Z \cdot \sqrt{\Delta t}$ für $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ hat die gewünschten Eigenschaften.

Algorithmus (Simulation eines Wiener-Prozesses)

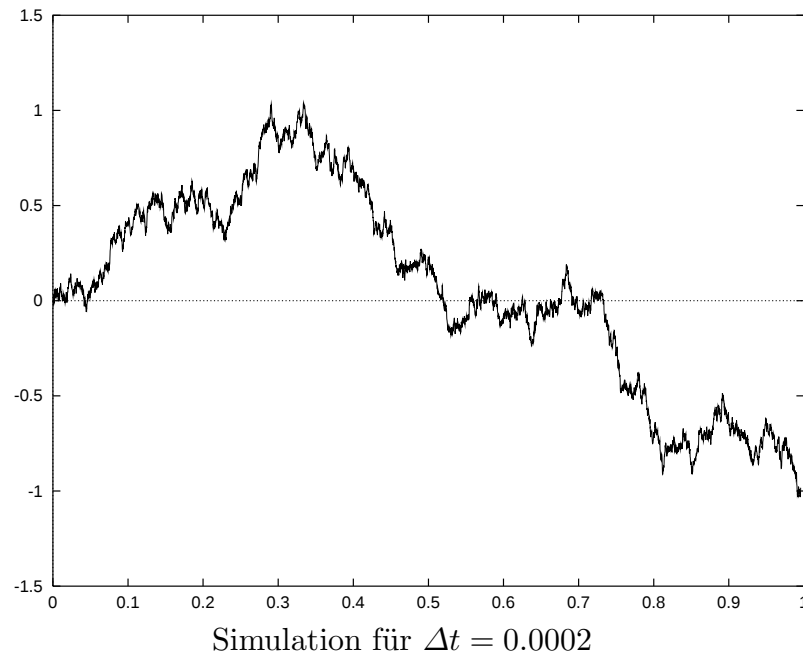
Start: $t_0 = 0, W_0 = 0; \Delta t$

Schleife $j = 1, 2, \dots :$

$$t_j = t_{j-1} + \Delta t$$

ziehe $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (numerisch)

$$W_j = W_{j-1} + Z\sqrt{\Delta t}$$

**Stochastisches Integral****Motivation:**

Ein Aktienkurs sei durch einen Wiener-Prozess W_t beschrieben. Es sei $b(t)$ die Anzahl der Aktien im Portfolio zum Zeitpunkt t . Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass es nur diskrete Handelszeitpunkte

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

gibt. Somit ist $b(t)$ stückweise konstant:

$$b(t) = b(t_{j-1}) \quad \text{für} \quad t_{j-1} \leq t < t_j \quad (*)$$

Es ergibt sich der Handelsgewinn

$$\sum_{j=1}^N b(t_{j-1})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nun sei die Aktie beliebig handelbar ($\rightarrow$ zeitstetiges Modell).

Frage: Konvergiert die Summe für $N \rightarrow \infty$?

Das Integral

$$\int_0^T b(t) \, dW_t$$

existiert nicht für allgemeine b als Riemann-Stieltjes-Integral. (Hinreichend für Existenz ist Endlichkeit der ersten Variation von W_t .)

Zeige: Die erste Variation $\sum_{j=1}^N |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|$ ist nicht beschränkt.

Beweis: Es gilt

$$\sum_{j=1}^N |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|^2 \leq \max_j (|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|) \sum_{j=1}^N |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|$$

für jede Zerlegung des Intervalls $[0, T]$. Nun $\Delta t \rightarrow 0$. Die zweite Variation ist beschränkt, bzw. konvergiert gegen ein $c \neq 0$ (siehe Lemma unten). Wegen der Stetigkeit von W geht der erste Faktor der rechten Seite gegen 0 und damit der zweite Faktor (die erste Variation) gegen ∞ .

Es bleibt noch zu untersuchen, was aus der zweiten Variation entsteht. Der verwendete Konvergenzbegriff ist die *Konvergenz im Mittel*, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(X - X_N)^2] = 0,$$

$$\text{bezeichnet als: } X = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} X_N.$$

Es bleibt zu zeigen:

Lemma

Es sei $t_0 = t_0^{(N)} < t_1^{(N)} < \dots < t_N^{(N)} = T$ eine Folge von Partitionen des Intervalls $t_0 \leq t \leq T$ mit $\delta_N := \max_{j=1}^N (t_j^{(N)} - t_{j-1}^{(N)})$. Dann gilt:

$$\text{l.i.m.}_{\delta_N \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (W_{t_j^{(N)}} - W_{t_{j-1}^{(N)}})^2 = T - t_0$$

Beweis: Übungen

Hinweis: Im Beweis des Lemmas treten die folgenden Aussagen auf

$$\mathbf{E}[(\Delta W_t)^2 - \Delta t] = 0$$

$$\text{Var}[(\Delta W_t)^2 - \Delta t] = 2 \cdot (\Delta t)^2.$$

Dies bedeutet, dass die Zufallsvariable ΔW_t^2 sich im obigen Sinne “ähnlich verhält” wie Δt . Symbolische Abkürzung:

$$(dW_t)^2 = dt$$

Die Konstruktion eines (für unsere einschlägigen Integranden b) existierenden stochastischen Integrals

$$\int_{t_0}^t b(s) \, dW_s$$

erfolgt aufbauend auf $\int_{t_0}^t b(s) dW_s := \sum_{j=1}^N b(t_{j-1})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$ für alle Stufenfunktionen b_N im Sinne von (*).

Konstruktion für allgemeinere b über Konvergenz im Mittel von geeignet gegen b konvergierenden Stufenfunktionen b_N , vgl. Literatur, z.B. [Øksendal: Stochastic Differential Equations], [Shreve: Stochastic Calculus].

1.5 Stochastische Differentialgleichungen

A. Begriff

Definition (Diffusionsmodell)

Die Itô-stochastische DGL ist die *Integralgleichung*

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s, s) dW_s.$$

Man benutzt die symbolische Schreibweise

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t$$

für die obige Integral-Gleichung. Lösungen dieser stochastischen DGL (d.h. obiger Integralgleichung) heißen *stochastische Diffusion*, oder *Itô-Prozess*. Der “Term” $a(X_t, t)$ heißt *Drift*-Term, und $b(X_t, t)$ heißt *Diffusion*.

Spezialfälle

- Den Standard-Wiener-Prozess erhält man mit $X_t = W_t$, $a = 0$, $b = 1$.
- Im deterministischen Fall gilt $b = 0$, d.h. $\frac{dX_t}{dt} = a(X_t, t)$.

Algorithmus (analog wie beim Wiener-Prozess)

Grundlage: diskrete Version

$$\Delta X_t = a(X_t, t) \Delta t + b(X_t, t) \Delta W_t$$

mit ΔW und Δt aus Abschnitt 1.4. Es bezeichne y_j eine Näherung zu X_{t_j} .

Start: $t_0, y_0 = X_0, \Delta t, W_0 = 0.$

Schleife: $j = 0, 1, 2, \dots$

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t$$

$$\Delta W = Z\sqrt{\Delta t} \text{ mit } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$y_{j+1} = y_j + a(y_j, t_j)\Delta t + b(y_j, t_j)\Delta W$$

(wird in Kapitel 3 vertieft: Ordnung “nur” $\frac{1}{2}$; anschaulich klar wegen $dW^2 = dt$.)

B. Anwendung auf den Aktienmarkt

Modell (GBM = Geometrisch Brownsche Bewegung)

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Dies ist eine *lineare* Itô-stoch.-DGL mit $a = \mu S_t$ und $b = \sigma S_t$. μ und σ dürfen von t abhängen, μ_t, σ_t , aber nicht auch von S_t , sonst wäre die Gleichung nicht linear. Bei Black-Scholes sind μ und σ konstant.

(→ “Lücke” GBM der Annahme 3 in Abschnitt 1.2 im mathematischen Modell des Marktes ist gefüllt.)

Bedeutung

μ wird als “Wachstumsrate” und σ als Volatilität interpretiert. Für die relative Änderung gilt

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Im Modell von Bachelier

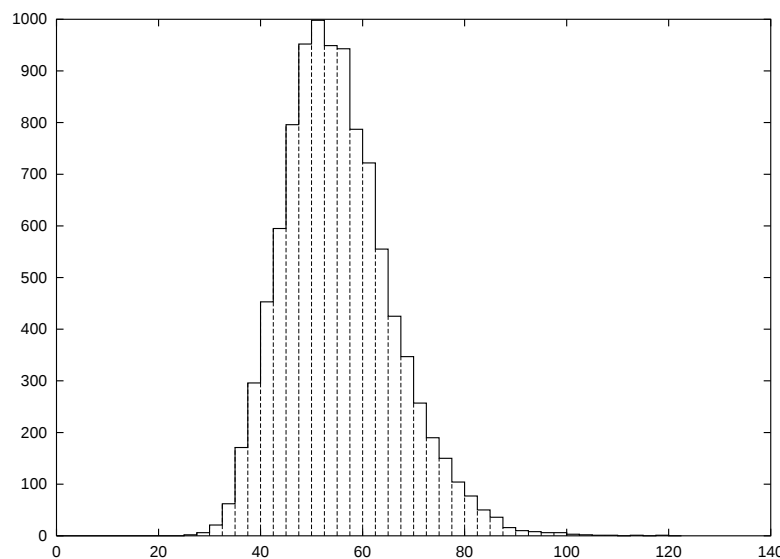
$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

kann der Aktienkurs S_t negativ werden.

Empfehlung

Den Algorithmus implementieren und ein konkretes Modell (z.B. mit $\mu = 0.1, \sigma = 0.2$) mehrmals (etwa 10000 mal) bis $t = 1$ zu integrieren und danach die erhaltenen Werte S_1 in Klassen (Teilintervalle) einteilen und zählen.

→ Histogramm mit “log-normal” Verteilung (siehe Figur)



Im Folgenden treffen wir die Annahme, dass eine GBM mit konstantem μ, σ vorliegt (entspricht dem Modell von Black-Scholes-Merton).

Folgerung:

Aus

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W$$

folgt für die Verteilung der $\frac{\Delta S}{S}$:

1) normalverteilt

2) $E[\frac{\Delta S}{S}] = \mu \Delta t$ 3) $\text{Var}[\frac{\Delta S}{S}] = \sigma^2 \Delta t$ also: $\frac{\Delta S}{S} \sim \mathcal{N}(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ Hieraus ergibt sich die folgende Methode, die Volatilitäten σ zu berechnen:

Die Daten $\frac{\Delta S}{S}$ für verschiedene Handelstage seien R_i (*returns*) genannt, wobei R_{i+1} und R_i im Zeitabstand Δt gemessen sind. Die Returns mögen möglichst gut durch das GBM-Modell beschrieben sein.

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} * \text{Standardabweichung der } R_i$$

Dieser spezielle aus den Daten der Vergangenheit ermittelte Wert σ heißt *historische Volatilität* (zur *impliziten* Volatilität vgl. Übungen).

Andere Modelle

GBM ist stetig und hat einige Eigenschaften (wie “dünne” Flanken der Dichtefunktion), die oft nicht überzeugen. Deswegen verwendet man auch andere stochastische Prozesse, z.B. Sprungprozesse oder Prozesse mit stochastische Volatilitäten. Wir bleiben vorläufig in der Klasse der Itô-DGL, d.h. von einem Wiener-Prozess angetriebene stetige Prozesse.

Mean-Reversion (oft für Zins-Modelle verwendet)Hier sei R ein mittleres Zinsniveau. Betrachte die SDE (Stoch.DGL.)

$$dr_t = \alpha(R - r_t) dt + \sigma_r r_t^\beta dW_t, \quad \alpha > 0$$

Das heißt

$$a(r_t, t) = \alpha(R - r_t) \quad \text{mean reversion Drift}$$

$$b(r_t, t) = \sigma_r r_t^\beta$$

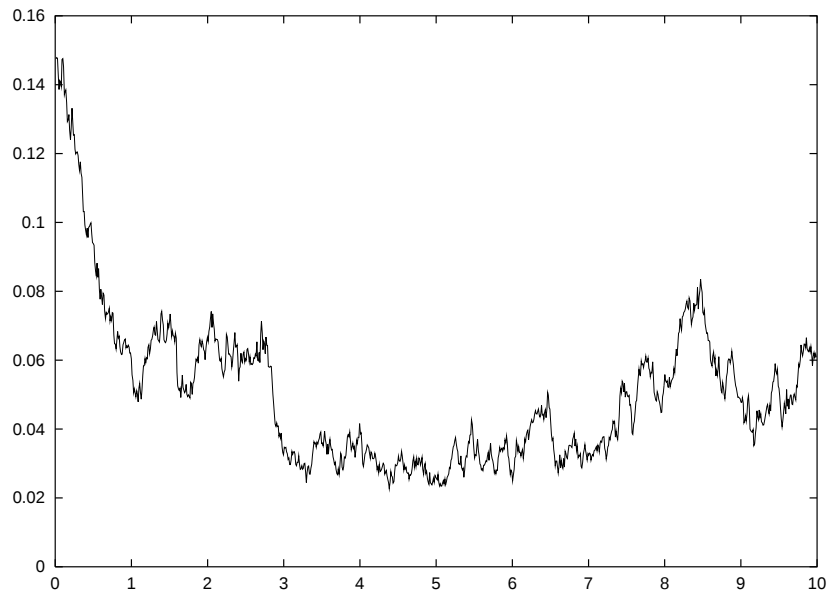
mit geeigneten Parametern $R, \alpha, \sigma_r, \beta$ (durch Kalibrierung ermittelt). Dies hat folgende Wirkung für den Drift:

$$r_t < R \Rightarrow \text{Wachstum des deterministischen Anteils}$$

$$r_t > R \Rightarrow \text{Abfall}$$

Also verbleibt r_t , abgesehen von der Wirkung des stochastischen Terms, in der Größenordnung von R . Der stochastische Term wird r_t immer wieder von R wegtreiben, aber latent kehrt r_t zu R zurück. α steuert die Geschwindigkeit der Rückkehr.

Für $\beta = \frac{1}{2}$, d.h. $b(r_t, t) = \sigma_r \sqrt{r_t}$, heißt das Modell CIR-Modell (Cox-Ingersoll-Ross-Modell).



Simulation r_t des Cox-Ingersoll-Ross-Modells für $R = 0.05$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$,
 $r_0 = 0.15$, $\sigma_r = 0.1$, $\Delta t = 0.01$

Nächste Erweiterung:

Vektorwertige Prozesse

Es sei $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(m)})$ eine m -dimensionale Brownsche Bewegung. Definiere für $i = 1, \dots, n$

$$X_t^{(i)} = X_{t_0}^{(i)} + \int_{t_0}^t a_i(X_s, s) ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t b_{i,k}(X_s, s) dW_s^{(k)},$$

mit den Vektoren

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ \vdots \\ X_t^{(n)} \end{pmatrix}, \quad a(X_s, s) = \begin{pmatrix} a_1(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(n)}, s) \\ \vdots \\ a_n(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(n)}, s) \end{pmatrix}$$

und der Matrix

$$\left((b_{i,k}) \right)_{i=1, \dots, n}^{k=1, \dots, m}$$

in welcher die Kovarianzen des Vektorprozesses stecken.

Beispiel 1 Heston-Modell

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW^{(1)} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma^{\text{vola}} \sqrt{v_t} dW^{(2)} \end{aligned}$$

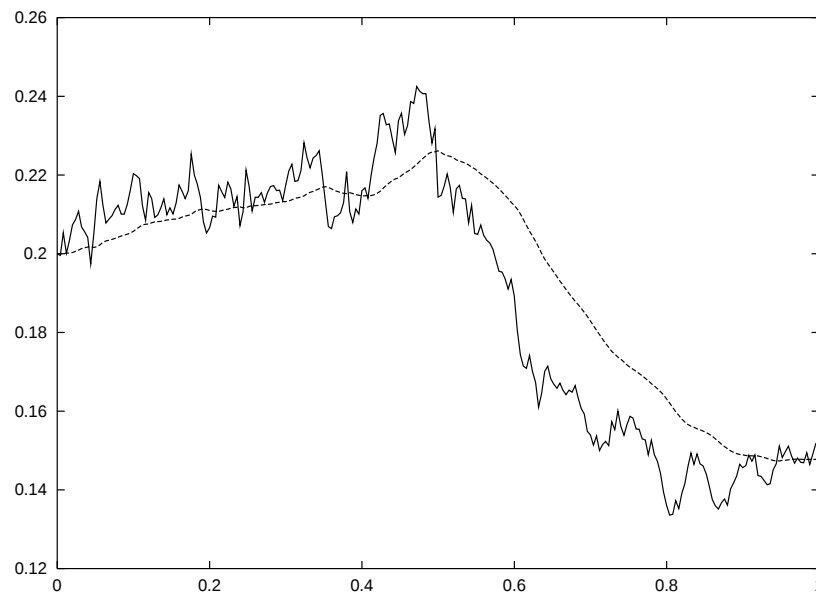
d.h. die **stochastische Volatilität** $\sqrt{v_t}$ ist über einen Mean-Reversion-Prozess für die Varianz v_t definiert. Dieses Modell mit $n = 2$ und $m = 2$ benutzt die Parameter $\kappa, \theta, \sigma^{\text{vola}}$, Korrelation ρ zwischen $W^{(1)}$ und $W^{(2)}$, sowie der Anfangswert v_0 , evtl. μ (falls nicht $\mu = r$, siehe unten). D.h. es müssen circa 5 Parameter kalibriert werden. Das Heston-Modell wird viel verwendet.

Beispiel 2 Volatilitäts-Tandem

$$dS = \sigma S dW^{(1)}$$

$$d\sigma = -(\sigma - \zeta)dt + \alpha\sigma dW^{(2)}$$

$$d\zeta = \beta(\sigma - \zeta) dt$$



$\alpha = 0.3, \beta = 10$; gestrichelt: ζ

Hinweis: Es gibt auch noch den Begriff der *lokalen* Volatilität

$$\sigma = \sigma(t, S_t).$$

C. Itô-Lemma

Motivation (deterministischer Fall)

Es sei $x(t)$ eine Funktion und $y(t) := g(x(t), t)$. Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dt}g = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Dies kann mit $dx = a(x(t), t)dt$ wie folgt geschrieben werden

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x} a + \frac{\partial g}{\partial t} \right) dt$$

Lemma (Itô)

X_t folge einem Itô-Prozess $dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$ und es sei $g(x, t) \in C^2$. Dann gilt für $Y_t := g(X_t, t)$ die SDG1

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial x} a + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} b dW_t.$$

D.h. Y_t ist ein Itô-Prozess mit dem gleichen Wiener-Prozess wie der Ausgangsprozess.

Beweis-Skizze:

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow t + \Delta t \\ X \rightarrow X + \Delta X \end{array} \right\} \rightarrow Y + \Delta Y = g(X + \Delta X, t + \Delta t)$$

Taylorentwicklung von ΔY :

$$\Delta Y = \frac{\partial g}{\partial X} \cdot \Delta X + \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t + \text{“Terme höherer Ordnung”}$$

Nach Einsetzen von

$$\begin{aligned} \Delta X &= a \Delta t + b \Delta W \\ (\Delta X)^2 &= a^2 \Delta t^2 + b^2 \underbrace{\Delta W^2}_{=\mathcal{O}(\Delta t)} + 2ab \Delta t \Delta W \end{aligned}$$

und Sortieren nach Potenzen von Δt , ΔW erhalte

$$\Delta Y = \left(\frac{\partial g}{\partial X} a + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} b^2 \right) \Delta t + b \frac{\partial g}{\partial X} \Delta W + \text{“T.h.O.”}$$

Ähnlich wie in Abschnitt 1.4 kann ΔW als Summe geschrieben werden, und *Konvergenz im Mittel* wird angewendet (technisch aufwändig). Siehe [Øksendal].

D. Anwendung auf das GBM-Modell

Betrachte das GBM-Modell

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

mit μ und σ konstant, d.h. $X = S$, $a = \mu S$, $b = \sigma S$.

1) Es sei $V(S, t)$ eine glatte Funktion ($\in C^2$)

$$\Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW$$

Hieraus folgt mit weiteren Überlegungen ($\rightarrow$ später) die partielle DGL nach Black und Scholes für die Wertfunktion $V(S, t)$ einer europäischen Standardoption.

2) $Y_t := \log(S_t)$, d.h. $g(x) = \log x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow \quad d(\log S_t) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

D.h. für die log-Preise $Y_t = \log S_t$ gilt die einfachst-denkbare SDGL, mit der elementaren Lösung:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t_0} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma (W_t - W_{t_0}) \\ \Rightarrow \quad \log S_t - \log S_{t_0} &= \log \frac{S_t}{S_{t_0}} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma (W_t - W_{t_0}) \\ \Rightarrow \quad S_t &= S_{t_0} \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma (W_t - W_{t_0}) \right] \end{aligned}$$

Es sei o.E. $t_0 = 0$ und $W_{t_0} = W_0 = 0$, dann erhält man

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$$

D.h. der Aktienkurs S_t ist die Exponentialfunktion einer Brownschen Bewegung mit Drift.

Folgerungen für $t_0 = 0$:

- a) $\log S_t$ ist normal-verteilt.
- b) $\mathbb{E}[\log S_t] = \mathbb{E}[\log S_0] + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + 0 = \log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$
- c) $\text{Var}[\log S_t] = \text{Var}[\sigma W_t] = \sigma^2 t$
- a) – c) zusammengefasst ergibt

$$\log \frac{S_t}{S_0} \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$$

- d) Hieraus ergibt sich die Dichtefunktion für $Y = \log S$

$$\hat{f}(\log S_t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp \left[-\frac{(\log(S_t/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t)^2}{2\sigma^2 t} \right].$$

Was ist nun die Dichtefunktion von S_t ? Diese kann durch eine Transformation der Verteilungsfunktion mittels des Transformationssatzes mit $Y := \log S$ berechnet werden

$$\hat{f} \, dY = \underbrace{\frac{1}{S} \hat{f}(\log S)}_{f(S_t)} \, dS.$$

So erhält man als Dichte f der Verteilung des Aktienkurses S_t

$$f(S_t, t; S_0, \mu, \sigma) := \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi t}} \exp \left[-\frac{(\log(S_t/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t)^2}{2\sigma^2 t} \right].$$

Dies ist die sogenannte *lognormal-Verteilung*.

- e) Nun kann die letzte Lücke der Herleitung der Binomialmethode geschlossen werden (siehe Übungen):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \int_0^\infty S f(\dots) \, dS = S_0 e^{\mu(t-t_0)} \\ \mathbb{E}(S^2) &= \int_0^\infty S^2 f(\dots) \, dS = S_0^2 e^{(\sigma^2 + 2\mu)(t-t_0)} \end{aligned}$$

1.6 Risikoneutrale Bewertung

(Dieser Abschnitt *skizziert* wichtige Begriffe und Ideen. Für eine genauere Darstellung sei auf die Literatur verwiesen, insbesondere zur Stochastischen Finanzmathematik, wie z.B. [Musielà&Rutkowski: Martingale Methods in Financial Modelling])

Wiederholung (Ein-Perioden-Modell)

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[\Psi(S_T)]$$

wobei Q eine künstliche Wahrscheinlichkeit ist, siehe Abschnitt 1.2, und $\Psi(S_T)$ den Payoff bezeichnet.

Analog gilt im **Modell mit kontinuierlicher Zeit**:

$$V_0 = e^{-rT} \int_0^T \Psi(S_T) \cdot f(S_T, T; S_0, r, \sigma) dS_T$$

also mit r statt μ ! Dies wird im Folgenden begründet. Von zentraler Bedeutung ist der

Hauptsatz der Asset-Bewertung

Das Marktmodell ist arbitragefrei dann und nur dann wenn es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q gibt so dass die diskontierten Assets Martingale bzgl. Q sind.

Vorbemerkung:

Stichprobenraum und σ -Algebra $(\Omega, \mathcal{F})$, die einem Wiener Prozess zugrunde liegen, werden nicht weiter spezifiziert. Die gewählte Wahrscheinlichkeit P ergänzt $(\Omega, \mathcal{F})$ zum Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Die Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses hängt von P ab, d.h. W kann Wiener-Prozess bzgl. P sein, ist dies aber nicht bezüglich einer anderen Wahrscheinlichkeit $\hat{P}$.

Exkurs: Martingal

Ein Martingal M_t ist ein stochastischer Prozess mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \text{für } s \leq t,$$

wobei $\mathcal{F}_s$ eine Filtration ist, d.h. eine Familie von σ -Algebren mit $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall s \leq t$. Eine solche Filtration ist ein Modell für den Informationsgehalt des Marktes.

$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]$ ist ein *bedingter Erwartungswert* und ist deutbar als Erwartungswert von M_t unter der Informationsmenge, die bis zum Zeitpunkt s zur Verfügung steht.

M_t “Martingal” heißt also, dass M_s zum Zeitpunkt $t \geq s$ die bestmögliche Prognose ist.

Martingal bzgl. Q : $\mathbb{E}_Q[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ für $t \geq s$.

Beispiele für Martingale

- 1) jeder Wiener-Prozess
- 2) $W_t^2 - t$ für jeden Wiener-Prozess W .
- 3) notwendiges Kriterium für Martingale: Driftfreiheit.

Im Wesentlichen sind driftfreie Prozesse Martingale.

Marktpreis des Risikos

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dW \\ &= rS dt + (\mu - r)S dt + \sigma S dW \\ &= rS dt + \sigma \left[\frac{\mu - r}{\sigma} S dt + S dW \right] \end{aligned}$$

Der Anleger erwartet eine Rendite $\mu > r$ als Ausgleich für das übernommene Risiko, welches durch σ repräsentiert wird. $\mu - r$ ist eine Art von Kompensation für das Risiko (*excess return*).

$$\begin{aligned} \gamma &:= \frac{\mu - r}{\sigma} = \text{“Marktpreis des Risikos”} \\ &= \text{Kompensationsrate im Verhältnis zum Risiko} \end{aligned}$$

Also

$$dS = rS dt + \sigma S [\gamma dt + dW] \quad (*)$$

Satz von Girsanov

Es sei W Wiener-Prozess bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Falls γ geeignete Voraussetzungen erfüllt, dann gibt es eine Wahrscheinlichkeit Q und einen Wiener-Prozess in der Form

$$W_t^\gamma := W_t + \int_0^t \gamma ds$$

so dass W_t^γ ein Martingal unter Q ist.

(Wahrscheinlichkeitstheorie: Q ergibt sich aus dem Satz von Radon-Nikodym. Q und P sind äquivalent. Für konstante γ sind die Voraussetzungen von Girsanov erfüllt.)

Anwendung

Einsetzen von $dW^\gamma = dW + \gamma dt$ in $(*)$ liefert

$$dS = rS dt + \sigma S dW^\gamma.$$

Dies ist ein Drift-Wechsel von μ zu r ; σ bleibt unverändert. Das Verhalten von S_t unter der Wahrscheinlichkeit Q ist definiert durch die Dichte $f(\dots, r, \sigma)$. Der Übergang von $f(\dots, \mu, \sigma)$ zu $f(\dots, r, \sigma)$ entspricht einer Justierung der Wahrscheinlichkeit. Dann ist $e^{-rt} S_t$ driftfrei unter Q und Martingal. Man nennt Q das “risiko-neutrale Maß”.

Handelsstrategie

Es sei X_t ein stochastischer Vektor-Prozess von Marktpreisen. b_t sei der Vektor der jeweils im Portfolio gehaltenen Stückzahlen. Folglich ist $b_t^\top X_t$ der Wert des jeweiligen Portfolios.

Beispiel

$$X_t := \begin{pmatrix} S_t \\ B_t \end{pmatrix},$$

wobei S_t Marktpreis der einer Option zugrunde liegenden Aktie ist und B_t der Wert einer risikofreien Anlage.

Bezeichnung: Es sei V_t die Zufallsvariable des Wertes einer europäischen Option.

Annahmen: (ähnlich auch für die Herleitung der Black-Scholes Gleichung)

- (1) Es existiere eine Strategie b_t , welche den Payoff der Option zum Zeitpunkt T repliziert, d.h.

$$b_T^* X_T = \text{Payoff} .$$

b_t muss $\mathcal{F}_t$ -messbar sein für alle t . (D.h. der Händler kann nicht in die Zukunft schauen. Beachte: Der Wert des Payoff ist Zufallsvariable.)

- (2) Das Portfolio ist gegenüber Geld-Zuflüssen und -Abflüssen abgeschlossen: Diese Eigenschaft heißt *selbstfinanzierend* und ist definiert als

$$d(b_t^* X_t) = b_t^* dX_t .$$

- (3) Der Markt ist arbitragefrei.

(1), (2), (3) $\Rightarrow V_t = b_t^* X_t$ für $0 \leq t \leq T$ (weil anderenfalls eine Arbitragemöglichkeit existieren würde.)

Wir betrachten nun eine europäische Option und einen Diskontierungsprozess Y_t mit der Eigenschaft, dass $Y_t X_t$ ein Martingal ist. Man kann zeigen, dass dann auch $Y_t b_t^* X_t$ ein Martingal ist (jeweils bzgl $\mathbb{Q}$).

Folgerungen für Europäische Optionen

$$\begin{aligned} Y_t V_t = Y_t b_t^* X_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_T b_T^* X_T | \mathcal{F}_t] && \text{(weil Martingal)} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_T \cdot \text{Payoff} | \mathcal{F}_t] && \text{(Replikation)} \end{aligned}$$

Falls der Payoff eine Funktion Ψ von S_T ist (Vanilla-Option mit GBM), dann

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_T \cdot \Psi(S_T)]$$

(weil $W_T - W_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$). $e^{-rt} S_t$ ist $\mathbb{Q}$ -Martingal, Diskontierung also $Y_t = e^{-rt}$. Speziell für $t = 0$ folgt

$$1 \cdot V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \cdot \Psi(S_T)]$$

und damit

$$V_0 = e^{-rT} \int_0^\infty \Psi(S_T) \cdot f(S_T, T; S_0, r, \sigma) dS_T .$$

Wir nennen dies *risiko-neutrale Bewertung*.

Literatur zur Stochastischen Finanzmathematik: [Elliot & Kopp: Mathematics of Financial Markets], [Korn: Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung], [Musiela & Rutkowski: Martingale Methods in Financial Modelling], [Shreve: Stochastic Calculus for Finance], u.a.

Ausblick

Bisher wurden nur (Wert-)stetige Modelle für S_t , und ebenso W_t , betrachtet. Im Hinblick auf gelegentlich drastische Preisbewegungen ist die Stetigkeit eine starke Einschränkung. Abhilfe gibt uns hier eine *stochastische* Volatilität, oder die Einführung von Sprungprozessen.

Ergänzungen zur Vorlesung

Die “**Griechen**” beschreiben die Sensitivitäten von $V(S, t; \sigma, r)$ und sind wie folgt definiert:

$$\text{Delta} = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \text{gamma} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \text{theta} = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \text{vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad \text{rho} = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Black-Scholes-Formel

For a European call the analytic solution of the Black-Scholes equation is

$$d_1 := \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 := d_1 - \sigma \sqrt{T - t} = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$V_C(S, t) = S e^{-\delta(T-t)} F(d_1) - K e^{-r(T-t)} F(d_2),$$

where F denotes the standard normal cumulative distribution (compare Exercises), and δ is a continuous dividend yield. The value $V_P(S, t)$ of a put is obtained by applying the put-call parity

$$V_P = V_C - S e^{-\delta(T-t)} + K e^{-r(T-t)}$$

from which

$$V_P = -S e^{-\delta(T-t)} F(-d_1) + K e^{-r(T-t)} F(-d_2)$$

follows.