

4. Standard-Methoden für Standard-Optionen

Betrachte Vanilla-Optionen mit Payoff $\Psi(S)$, dabei ist S der Preis eines *underlying* Assets. Modell: GBM. Zugelassen sei eine kontinuierliche *Dividendenrate* $\delta \geq 0$, also

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \delta) dt + \sigma dW_t.$$

4.1 Vorbereitungen

Die Black-Scholes-Gleichung für den Wert $V(S, t)$ einer Standard-Option ist

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0.$$

Definitionsbereich: $S > 0$, $0 \leq t \leq T$. Endbedingung: $V(S, T) = \Psi(S)$.

Diese partielle DGL kann direkt mit numerischen Methoden gelöst werden. Allerdings müssen in dieser Version kompliziertere Instabilitäten berücksichtigt werden. ($\longrightarrow$ später)

Mit Transformationen können einfachere Versionen aufgestellt werden, z.B. mit $S = e^x$.

Annahme: σ , r und δ seien konstant.

Dann kann die Black-Scholes-Gleichung auf einen besonders einfachen Typ von PDGL transformiert werden (vgl. Übungen). Mit $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$, $S = Ke^x$, $q := \frac{2r}{\sigma^2}$, $q_\delta := \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}$ und $y(x, \tau)$ definiert durch

$$V(S, t) = V(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) =: v(x, \tau)$$

$$v(x, \tau) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x - \left(\frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2 + q \right) \tau \right\} y(x, \tau)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Dies ist eine parabolische Gleichung, welche eine analytische Lösung besitzt. Nach Rücktransformation ergibt sich die bekannte Black-Scholes-*Formel*. Somit benötigen wir keine weiteren numerischen Methoden für Standard-Optionen europäischen Typs.

Unser Ziel ist es, **amerikanische** Optionen zu bewerten.

Generische Anwendungen für die einfache PDGl $y_\tau = y_{xx}$ sind die Wärmeleitung und die Diffusion in einem eindimensionalen Medium. Dies Problem ist sachgemäß gestellt (*well-posed*) als Anfangswertproblem mit wachsendem τ , eventuell mit Randbedingungen. Wegen der Zeit-Transformation $t \rightarrow \tau$ wird aus der Endbedingung für $V(S, T) = \Psi(S)$ nun eine Anfangsbedingung für $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Call: } y(x, 0) &= \max \left\{ e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)}, 0 \right\} \\ \text{Put: } y(x, 0) &= \max \left\{ e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)}, 0 \right\} \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich ist jetzt

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T =: \tau_{\max}$$

d.h. ein *Streifen* in der (x, τ) -Ebene. “Rand” bedeutet hier also $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$. Für numerische Zwecke muss der Streifen durch ein Rechteck ersetzt werden. Deswegen müssen zur Vervollständigung des Problems der partiellen Differentialgleichung Randbedingungen hinzugefügt werden.

4.2 Grundlagen von Finite-Differenzen-Methoden (FDM)

A. Differenzen-Approximationen

Es gilt

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in (x, x+h) \text{ und } f \in C^2$$

Wir führen ein äquidistantes Gitter mit den Gitterpunkten x_i

$$\dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots$$

und $h := x_{i+1} - x_i$ ein. [Im nicht äquidistanten Fall verwendet man eher Finite-Elemente-Methoden (FEM).] Wir arbeiten in diesem Kapitel ausschließlich mit äquidistanten Gittern.

Mit der Bezeichnung $f_i = f(x_i)$ gilt analog:

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) & \text{für } f \in C^3 \\ f''(x_i) &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) & \text{für } f \in C^4 \\ f'(x_i) &= \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + \mathcal{O}(h^2) & \text{für } f \in C^3 \end{aligned}$$

B. Das Gitter

Ersetze $-\infty < x < +\infty$ durch

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}.$$

Wähle $x_{\min}$ und $x_{\max}$ derart, dass die Lösung auf dem Intervall $[x_{\min}, x_{\max}]$ “gut genug” mit derjenigen zu $-\infty < x < \infty$ übereinstimmt. Für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $\nu_{\max} \in \mathbb{N}$ definiere

$$\begin{aligned}\Delta x &:= \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}, & \Delta \tau &:= \frac{\tau_{\max}}{\nu_{\max}}, \\ \tau_{\nu} &:= \nu \cdot \Delta \tau, & \nu &= 0, \dots, \nu_{\max}, \\ x_i &:= x_{\min} + i \cdot \Delta x, & i &= 0, 1, \dots, m.\end{aligned}$$

$y_{i,\nu} := y(x_i, \tau_{\nu})$ ist Wert von y am “Knoten” (x_i, τ_{ν}) . $w_{i,\nu}$ ist eine Approximation von $y_{i,\nu}$.
Über die Anfangsbedingung sind bekannt

$$w_{i,0} = y(x_i, 0).$$

C. Explizite Methode

Ersetze

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_{i,\nu}}{\partial \tau} &= \frac{y_{i,\nu+1} - y_{i,\nu}}{\Delta \tau} + \mathcal{O}(\Delta \tau) \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 y_{i,\nu}}{\partial x^2} &= \frac{y_{i+1,\nu} - 2y_{i,\nu} + y_{i-1,\nu}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)\end{aligned}$$

in der PDGI, lasse den Fehlerterm weg, ersetze $y \rightarrow w$ und erhalte:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i,\nu}}{\Delta \tau} = \frac{w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu}}{\Delta x^2}.$$

Wenn für eine “Zeitschicht” ν alle Werte w berechnet sind, können explizit mit

$$w_{i,\nu+1} = w_{i,\nu} + \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} (w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu})$$

die Werte für die Zeitschicht $\nu + 1$ berechnet werden. Mit der Abkürzung

$$\lambda := \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}$$

erhält man

$$w_{i,\nu+1} = \lambda w_{i-1,\nu} + (1 - 2\lambda) w_{i,\nu} + \lambda w_{i+1,\nu}. \quad (*)$$

Beginne mit $\nu = 0$, weil dort die $w_{i,0}$ durch die Anfangsbedingung der PDGI bekannt sind. D.h. für $\nu = 1$ können alle $w_{i,1}$ mit der expliziten Formel $(*)$ ausgerechnet werden und ebenso Zeitschicht-weise die weiteren Werte.

ν ist der äußere Schleifenindex und i der innere. Dies legt nahe, folgende Vektoren und Matrizen einzuführen:

$$w^{(\nu)} := (w_{1,\nu}, \dots, w_{m-1,\nu})^{\mathsf{T}} \quad (\text{noch ohne Randkomponenten } w_{0,\nu} \text{ und } w_{m,\nu}),$$

also die Werte der ν -ten Zeitschicht, und die $(m-1) \times (m-1)$ Matrix

$$A := A_{\text{expl}} := \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

Somit lautet die explizite Methode

$$w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)} \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \dots, \nu_{\max} - 1$$

bis auf eine Korrektur wegen Randbedingungen für $w_{0,\nu}$ und $w_{m,\nu}$. Zur Einsparung von Schreibarbeit setzen wir *vorläufig* die Randbedingung auf null.

Beispiel

$y_\tau = y_{xx}$ mit $y(x, 0) = \sin \pi x$, $x_0 = 0$, $x_m = 1$ und Randbedingungen $= 0$.

Wir wollen eine Näherung zu $y(x = 0.2, \tau = 0.5)$ berechnen und benutzen dafür das Gitter mit $\Delta x = 0.1$, d.h. $0.2 = x_2$, und zwei verschiedene Ausführungen für $\Delta \tau$:

- a) $\Delta \tau = 0.0005 \Rightarrow \lambda = 0.05$ und $0.5 = \tau_{1000}$
ergibt $w_{2,1000} = 0.00435$ (exakt wäre 0.004227)
- b) $\Delta \tau = 0.01 \Rightarrow \lambda = 1$ und $0.5 = \tau_{50}$
ergibt $w_{2,50} = -1.5 \cdot 10^8$ (also Instabilität)

D. Stabilität

Fehleranalyse von $w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)}$

Bezeichnung

$w^{(\nu)}$ seien die exakten Vektoren von $w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)}$,
 $\bar{w}^{(\nu)}$ sei im Rechner berechnet,
 $e^{(\nu)} := \bar{w}^{(\nu)} - w^{(\nu)}$,
 $\bar{w}^{(\nu+1)} = A\bar{w}^{(\nu)} + r^{(\nu+1)}$,
wobei $r^{(\nu+1)}$ die Rundungsfehler im ν -ten Schritt repräsentiert.

Zur Vereinfachung setze $r^{(\nu)} = 0$ für $\nu > 1$, d.h. studiere den Fortgang des Fehlers $e^{(0)}$ im Laufe der weiteren Iterationen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{w}^{(\nu+1)} &= A\bar{w}^{(\nu)} \quad (\nu > 1) \\ \Rightarrow Ae^{(\nu)} &= A\bar{w}^{(\nu)} - Aw^{(\nu)} = \bar{w}^{(\nu+1)} - w^{(\nu+1)} = e^{(\nu+1)} \\ \Rightarrow e^{(\nu)} &= A^\nu e^{(0)} \end{aligned}$$

Wir fordern für ein stabiles Verhalten $A^\nu e^{(0)} \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow \infty$.

Lemma 1

$$\begin{aligned} \rho(A) < 1 &\iff A^\nu z \rightarrow 0 \text{ für alle } z \text{ und } \nu \rightarrow \infty \\ \left(\rho(A) &:= \max_k |\mu_k^A| \text{ mit } \mu^A \text{ ist Eigenwert von } A \right) \end{aligned}$$

Beweis: Vorlesung über Numerik.

A ist hier von folgender Gestalt

$$A = I - \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:G}.$$

$$\Rightarrow \mu^A = 1 - \lambda \mu^G.$$

Lemma 2

$$\text{Für } G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & 0 \\ \gamma & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ gilt}$$

$$\mu_k^G = \alpha + 2\beta \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \cos \frac{k\pi}{N+1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Beweis:

Mit den Eigenvektoren

$$v^{(k)} = \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \sin \frac{k\pi}{N+1}, \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \right)^2 \sin \frac{2k\pi}{N+1}, \dots, \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \right)^N \sin \frac{Nk\pi}{N+1} \right)^T$$

$$\text{prüfe } Gv^{(k)} = \mu^G v^{(k)}.$$

Die Anwendung von Lemma 2 mit $N = m - 1$, $\alpha = 2$ und $\beta = \gamma = -1$ ergibt

$$\mu_k^G = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{m} = 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2m} \right)$$

$$\mu_k^A = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2m}.$$

Mit Lemma 1:

$$\begin{aligned} \text{Stabilität} &\iff \left| 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2m} \right| < 1, \quad k = 1, \dots, m-1 \\ &\iff \lambda > 0 \text{ und } -1 < 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2m}, \quad \text{bzw. } \frac{1}{2} > \lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2m} \end{aligned}$$

Für die zweite Ungleichung ist $\lambda \leq 1/2$ hinreichend. Zusammengefasst:

Für $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ ist die explizite Methode $w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)}$ mit $A = A_{\text{expl}}$ stabil.

Wegen $\lambda = \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$, bzw. $0 < \Delta\tau \leq 1/2\Delta x^2$ sind $\Delta\tau$ und Δx nicht unabhängig voneinander wählbar.

Folgerung

Diese explizite Methode ist unbefriedigend.

E. Eine implizite Methode

Der “Rückwärts”-Differenzenquotient

$$\frac{\partial y_{i,\nu}}{\partial \tau} = \frac{y_{i,\nu} - y_{i,\nu-1}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau).$$

führt zu

$$-\lambda w_{i+1,\nu} + (2\lambda + 1)w_{i,\nu} - \lambda w_{i-1,\nu} = w_{i,\nu-1}.$$

Dies ist ein System von gekoppelten linearen Gleichungen für die $w_{i,\nu}$. Mit

$$A := A_{\text{impl}} := \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

ist der Vektor $w^{(\nu)}$ implizit definiert als Lösung von $Aw^{(\nu)} = w^{(\nu-1)}$, oder

$$Aw^{(\nu+1)} = w^{(\nu)}, \quad \nu = 0, \dots, \nu_{\max} - 1.$$

(Wiederum haben wir die Randbedingungen vorläufig auf $w_{0,\nu} = w_{m,\nu} = 0$ gesetzt.) Diese Methode heißt *Rückwärts-Differenzen-Methode* oder *backwards-time-centerspace (BTCS)* oder *fully implicit*.

Stabilität:

Auf Grund der Lemmata ist das Verfahren *uneingeschränkt stabil*, und $\Delta\tau$ und Δx sind unabhängig voneinander.

Kosten des Verfahrens:

$\mathcal{O}(m)$, weil nur eine *LR*-Zerlegung von A für $\nu = 0$ notwendig ist. Die Kosten sind minimal, weil A Tridiagonal-Gestalt besitzt. Für jedes ν muss nur eine Schleife rückwärts und eine vorwärts durchlaufen werden, welche jeweils $\mathcal{O}(m)$ Operationen benötigen.

Ein Nachteil dieser Methode (und auch der expliziten Methode) ist die Genauigkeit

$$\mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta\tau).$$

4.3 Crank-Nicolson-Methode

Gesucht ist eine stabile Methode der Genauigkeit $\mathcal{O}(\Delta\tau^2)$ für

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Vorwärts für ν :

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i,\nu}}{\Delta\tau} = \frac{w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu}}{\Delta x^2}$$

und rückwärts für $\nu + 1$:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i,\nu}}{\Delta\tau} = \frac{w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}}{\Delta x^2}$$

Addition/Mitteln der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i,\nu}}{\Delta\tau} = \frac{1}{2\Delta x^2} (w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu} + w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}).$$

Satz (Crank-Nicolson)

Es sei $y \in C^4$, so gelten folgende Aussagen:

- 1.) Die Methode ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2)$.
- 2.) Für jedes ν muss ein lineares Gleichungssystem in Tridiagonalgestalt gelöst werden.
- 3.) Für alle $\Delta\tau > 0$ ist das Verfahren stabil.

Beweis:

zu 1.)

Mit der Abkürzung

$$\delta_{xx} w_{i,\nu} := \frac{w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu}}{\Delta x^2}$$

gilt mit Taylor-Entwicklung für $y \in C^4$

$$\delta_{xx} y_{i,\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_{i,\nu} + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} y_{i,\nu} + \mathcal{O}(\Delta x^4).$$

Für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\varepsilon := \frac{y_{i,\nu+1} - y_{i,\nu}}{\Delta\tau} - \frac{1}{2} (\delta_{xx} y_{i,\nu} + \delta_{xx} y_{i,\nu+1})$$

gilt dann

$$\varepsilon = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2).$$

zu 2.)

Mit $\lambda := \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$ erhält man Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} w_{i-1,\nu+1} + (1 + \lambda) w_{i,\nu+1} - \frac{\lambda}{2} w_{i+1,\nu+1} \\ = \frac{\lambda}{2} w_{i-1,\nu} + (1 - \lambda) w_{i,\nu} + \frac{\lambda}{2} w_{i+1,\nu}. \end{aligned}$$

Mit den vorläufigen Randbedingungen $w_{0,\nu} = w_{m,\nu} = 0$ ergibt sich das Matrix-Vektor-System

$$Aw^{(\nu+1)} = Bw^{(\nu)}$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{pmatrix}, \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & & \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A müssen nach dem Satz von Gerschgorin zwischen 1 und $1 + 2\lambda$ liegen. Somit ist Null kein Eigenwert und A nichtsingulär, und das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung.

zu 3.)

Setze

$$A = I + \frac{\lambda}{2}G \quad \text{mit} \quad G := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = I - \frac{\lambda}{2}G.$$

So gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{(2I + \lambda G)}_{=:C} w^{(\nu+1)} &= (2I - \lambda G) w^{(\nu)} \\ &= (4I - 2I - \lambda G) w^{(\nu)} \\ &= (4I - C) w^{(\nu)}, \end{aligned}$$

welches zur expliziten Form

$$w^{(\nu+1)} = (4C^{-1} - I) w^{(\nu)}$$

führt. Somit lautet die Stabilitätsforderung

$$\left| \frac{4}{\mu_k^C} - 1 \right| < 1 \quad \text{für alle } k.$$

Die Eigenwerte μ_k^C von C sind nach Lemma 2

$$\mu_k^C = 2 + \lambda \mu_k^G = 2 + \lambda \left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{m} \right) = 2 + 4\lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2m}.$$

Das Verfahren ist also stabil für alle $\lambda > 0$ ($\Delta\tau > 0$).

Algorithmus (Crank-Nicolson)

Start: Wähle $m, \nu_{\max}$; berechne $\Delta x, \Delta\tau$

$$w_i^{(0)} = y(x_i, 0) \quad (0 \leq i \leq m)$$

Berechne LR -Zerlegung (bzw. RL -Zerlegung) von A

Schleife: für $\nu = 0, 1, \dots, \nu_{\max} - 1$:

Berechne $c := Bw^{(\nu)} + 0$ (vorläufige Randbedingungen)

Löse $Ax = c$ (mit Hilfe der LR/RL -Zerlegung)

$$w^{(\nu+1)} := x$$

4.4 Randbedingungen

Da Anfangsbedingungen nur noch für $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ aktiv sind, werden Randbedingungen

$$y(x, \tau) \text{ für } x_{\min} \text{ und } x_{\max}, \quad \text{oder} \\ w_{0,\nu} \text{ und } w_{m,\nu} \text{ für } \nu = 1, \dots, \nu_{\max}$$

benötigt, damit das Problem sachgemäß gestellt ist. Diese Randbedingungen sind künstlich und haben Einfluss auf die Genauigkeit der numerischen Lösung.

Aus dem Modell der GBM für S_t folgt

$$\begin{aligned} S(0) = 0 &\Rightarrow S_t = 0 \text{ für alle } t \\ S(0) \rightarrow \infty &\Rightarrow S_t \text{ groß für alle } t \leq T \end{aligned}$$

woraus wir folgern, dass für alle t

$$\begin{aligned} V_C(S, t) &= 0 \quad \text{für } S = 0, \text{ und} \\ V_P(S, t) &\rightarrow 0 \quad \text{für } S \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Damit sind die folgenden Randbedingungen sinnvolle Näherungen, sofern $-x_{\min} = -x_0$ und $x_{\max} = x_m$ groß sind:

$$\begin{aligned} \text{Call: "links"} \quad (S = 0) \quad V &= 0, \text{ d.h. } w_{0,\nu} = 0 \text{ für alle } \nu \\ \text{Put: "rechts"} \quad (S \rightarrow \infty) \quad V &= 0, \text{ d.h. } w_{m,\nu} = 0 \text{ für alle } \nu \end{aligned}$$

Die bisherige Argumentation ist sowohl für europäische als auch für amerikanische Optionen gültig. Nun stellt sich die Frage, was man für die Werte auf der jeweiligen "anderen" Seite erhält.

Wir betrachten zuerst **europäische** Optionen.

Wende die *Put-Call-Parität*

$$V_P = V_C - S e^{-\delta(T-t)} + K e^{-r(T-t)}$$

an, um die Randbedingungen auf der anderen Seite zu erhalten. Man erhält so

$$\begin{aligned} V_C(S, t) &= S e^{-\delta(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \quad \text{für } S \rightarrow \infty \\ V_P(S, t) &= K e^{-r(T-t)} - S e^{-\delta(T-t)} \quad \text{für } S \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nach der Transformation $(S, t) \rightarrow (x, \tau)$ ergibt sich folgendes asymptotisches Verhalten:

$$\begin{aligned} y(x, \tau) &= r_1(x, \tau) \text{ für } x \rightarrow -\infty, \quad y(x, \tau) = r_2(x, \tau) \text{ für } x \rightarrow \infty, \text{ mit} \\ \text{Call: } r_1(x, \tau) &:= 0, \quad r_2(x, \tau) := \exp\left(\frac{1}{2}(q_\delta + 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta + 1)^2\tau\right) \\ \text{Put: } r_1(x, \tau) &:= \exp\left(\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x + \frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2\tau\right), \quad r_2(x, \tau) := 0 \end{aligned}$$

Nutze dies auch für das endliche Intervall $a := x_{\min} \leq x \leq x_{\max} =: b$. Approximationen für die Randbedingungen sind

$$\begin{aligned} w_{0,\nu} &= r_1(a, \tau_\nu) \\ w_{m,\nu} &= r_2(b, \tau_\nu). \end{aligned}$$

Dies sind Randbedingungen vom Dirichlet-Typ. Sie führen im Crank-Nicolson-Schema auf die zusätzlichen Terme

$$-\frac{\lambda}{2}w_{0,\nu+1} = -\frac{\lambda}{2}r_1(a, \tau_{\nu+1})$$

$$\frac{\lambda}{2}w_{0,\nu} = \frac{\lambda}{2}r_1(a, \tau_{\nu})$$

und

$$-\frac{\lambda}{2}w_{m,\nu+1} = -\frac{\lambda}{2}r_2(b, \tau_{\nu+1})$$

$$\frac{\lambda}{2}w_{m,\nu} = \frac{\lambda}{2}r_2(b, \tau_{\nu}),$$

welche durch den Vektor

$$d^{(\nu)} := \frac{\lambda}{2} \cdot \begin{pmatrix} r_1(a, \tau_{\nu+1}) + r_1(a, \tau_{\nu}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_2(b, \tau_{\nu+1}) + r_2(b, \tau_{\nu}) \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \cdot \begin{pmatrix} w_{0,\nu} + w_{0,\nu+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{m,\nu} + w_{m,\nu+1} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Im Crank-Nicolson-Algorithmus ist die rechte Seite des Gleichungssystems nun

$$c := Bw^{(\nu)} + d^{(\nu)}$$

Die Matrix A bleibt unverändert.

4.5 Vorzeitiges Ausüben — Freie Randwertprobleme

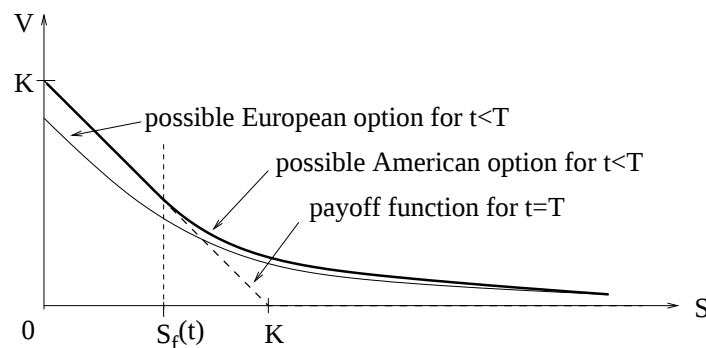
Für den Fall amerikanischer Optionen ist eine weitere Analyse der Lösungsstruktur notwendig.

Grundlagen (für den Put beim Black-Scholes Modell)

- a) $V(S, t)$ ist stetig.
- b) Für $r > 0$ und $t < T$ gilt

$$V_P^{\text{eu}}(0, t) = Ke^{-r(T-t)} < K,$$

woraus wir folgern: Es gibt ein S^* , so dass $V_P^{\text{eu}}(S^*, t) = K - S^*$.



- c) V_P ist monoton fallend bzgl. S .

- d) $V_P^{\text{am}} \geq (K - S)^+$

Behauptung 1

Auch für den amerikanischen Put gibt es für $r > 0$ ein $S^* > 0$, so dass $V_P^{\text{am}}(S^*, t) = K - S^*$.

Beweis:

Annahme: $V_P^{\text{am}} > K - S$ für alle $S > 0$.

Somit gilt:

$$-V_P^{\text{am}} + K - S < 0,$$

d.h. Ausüben würde für alle S einen Verlust verursachen. Somit wäre *early exercise* nie sinnvoll, und es würde gelten

$$V_P^{\text{am}} = V_P^{\text{eu}} > K - S,$$

für alle $S > 0$, welches im Widerspruch zur Folgerung aus b) steht.

Behauptung 2

(Voraussetzung: Für $S < S^*$ gelte $V = K - S$.)

Die Kurve der Funktion $V_P^{\text{am}}(S, t)$ mündet an $S = S^*$ C^1 -glatt bzgl. S in den Payoff ein.

Begründung:

Wir benutzen die Notation $V := V_P^{\text{am}}$.

Mit geometrischen Überlegungen gilt

$$\frac{\partial V(S^*, t)}{\partial S} \geq -1.$$

Annahme:

$$\frac{\partial V(S^*, t)}{\partial S} > -1.$$

Widerlegung:

Setze ein Portfolio an:

$$\Pi := V + S^*.$$

(= K ; leihe hierfür von der Bank den Betrag K .) Zudem unterstellen wir eine GBM

$$dS = \mathcal{O}(dt) + \sigma S dW$$

d.h. $dW > 0 \iff dS > 0$ falls dt klein genug ist.

Für $dS > 0$ ergibt das Itô-Lemma

$$\begin{aligned} d\Pi &= \mathcal{O}(dt) + \frac{\partial \Pi}{\partial S} \sigma S dW \\ &= \mathcal{O}(dt) + \left(\frac{\partial V}{\partial S} + 1 \right) \sigma S dW. \end{aligned}$$

Für $dS < 0$ gilt $\Pi = K$ und deswegen $d\Pi = 0$. Für eine Arbitrage-Möglichkeit treffe die Annahme, dass dt so klein ist, dass $\sqrt{dt} \gg dt$.

Im Fall $dS > 0$ folgt $dW > 0$ und somit

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial S} + 1 \right) \sigma S dW + \mathcal{O}(dt) > 0.$$

Insgesamt: $E(d\Pi) > 0$. Verkaufe das Portfolio nach Ablauf von dt und erwarte folgenden Kontostand

$$\begin{aligned}
\Pi + E(d\Pi) - Ke^{rdt} &= V + S^* + E(d\Pi) - K(1 + \mathcal{O}(dt)) \\
&= E(d\Pi) + \mathcal{O}(dt) \\
&= \mathcal{O}(\sqrt{dt}) > 0.
\end{aligned}$$

Dies stünde im Widerspruch zum No-Arbitrage-Prinzip.

(Für einen formalen Beweis siehe [Moerbeke (1976)].)

Es bleibt im Fall eines amerikanischen Put der Schluss, dass Folgendes gilt:

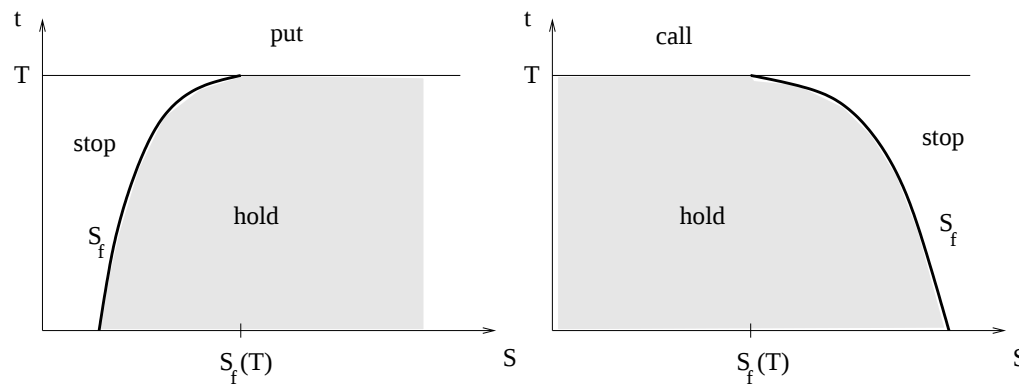
- (1) $V(S^*, t) = K - S^*$
- (2) $\frac{\partial V(S^*, t)}{\partial S} = -1$
- (3) $V(S, t) > K - S$ für $S > S^*$
- (4) $V(S, t) = K - S$ für $S \leq S^*$

(2) heißt *Kontaktbedingung* (engl. *high contact, smooth pasting*).

Da für jedes t ein derartiges S^* existiert, ist hierdurch eine Funktion definiert, welche wir mit $S_f(t)$ bezeichnen. Das “f” steht für “freier Rand”, bzw. *free-boundary problem*.

$S_f(t)$ bewirkt eine Zweiteilung des Halbstreifens, nämlich

- 1.) $S > S_f$ heißt Fortsetzungsbereich, auch “Haltebereich” (*continuation region*) des Put.
- 2.) $S \leq S_f$ heißt Stoppbereich (*stopping region*) des Put.



Begründung

- 1.) Falls $V_P > (K - S)^+$, so bedeutet vorzeitiges Ausüben $-V + K - S < 0$, also Verlust. Also übt man in diesem Bereich *nicht* aus: “continuation”, d.h. die Option wird gehalten.
- 2.) Wenn der Kurs die Kurve $S_f(t)$ erreicht bzw. überschreitet zu $S \leq S_f(t)$, dann sollte man sofort vorzeitig ausüben (“stopping”), weil so der Geldbetrag K , der beim Ausüben erhalten wird, angelegt werden kann und folgender Gewinn erzielt wird:

$$Ke^{r(T-t)} - K = K(e^{r(T-t)} - 1).$$

“Freies Randwertproblem” bedeutet:

Die Black-Scholes-Gleichung ist *nur* im Fortsetzungsbereich gültig, und nicht im Stopp-Bereich. D.h. ihr Definitionsbereich für den Put ist

$$S_f(t) \leq S < \infty.$$

Der “linke” Rand $S_f(t)$ ist “frei”, insbesondere ist er zunächst unbekannt, und muss erst numerisch berechnet werden. Die zusätzliche Randbedingung, welche implizit die Lage von $S_f(t)$ bestimmt, ist die Kontaktbedingung $\frac{\partial V}{\partial S} = -1$.

Die Eigenschaften für einen Call können analog hergeleitet werden.

Wichtige Eigenschaften der early-exercise-Kurve im Falle eines Puts nach dem Black-Scholes-Modell sind folgende:

- 1.) $S_f(t)$ ist monoton wachsend.
- 2.) $S_f(t)$ ist für $t < T$ stetig differenzierbar.
- 3.)

$$S_f(T) := \lim_{\substack{t \rightarrow T \\ t < T}} S_f(t) = \min \left\{ K, \frac{r}{\delta} K \right\}$$

Beweis von 3.) (Bez. $V = V_P^{\text{am}}$)

Der Fall $K < S_f(T)$ ist unmöglich, weil es z.B. für $t < T$ eine obere Schranke $S^* \geq S_f(t)$ gibt mit $S^* \leq K$, siehe oben die Behauptung 1. Also: $S_f(T) \leq K$.

Vorbemerkung: Für $V(S, t)$ gilt wegen $V \geq \Psi$ zumindest für $t = T$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq 0.$$

An $t = T$ gilt für $S \leq K$

$$V(S, T) = K - S.$$

Hier lautet die Black-Scholes-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + 0 - (r - \delta)S - rV &= 0 \\ \implies \frac{\partial V(S, T)}{\partial t} &= rK - \delta S. \end{aligned}$$

Für welche (δ, r) -Kombinationen ist das Vorzeichen von $\frac{\partial V(S, T)}{\partial t}$ konform mit $\frac{\partial V}{\partial t} \leq 0$?

Fall: $\delta > r$

Hier gilt $\frac{r}{\delta}K < K$. Es gilt entweder $S_f(T) = \frac{r}{\delta}K$ (also die Behauptung), oder es existiert eines von zwei offenen Teilintervallen (i) $S_f(T) < \frac{r}{\delta}K$ und (ii) $\frac{r}{\delta}K < S_f(T)$.

- (i) Es existiert ein S , so dass $S_f(T) < S < \frac{r}{\delta}K$. Es gilt $\frac{\partial V(S, T)}{\partial t} = rK - \delta S > 0$, ein Widerspruch zu

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq 0.$$

- (ii) Es existiert ein S , so dass $\frac{r}{\delta}K < S < S_f(T)$. Es gilt somit $rK < \delta S$ und es folgt

$$K(e^{rdt} - 1) < S(e^{\delta dt} - 1).$$

Das heißt, der Dividendenenertrag bei Fortsetzen ist größer als der Zinsertrag bei Ausüben. Somit ist vorzeitiges Ausüben kurz vor T nicht optimal, welches ein Widerspruch zur Bedeutung von $S < S_f(t)$ ist.

Es muss im Fall $\delta > r$ also $S_f(T) = \frac{r}{\delta}K$ gelten.

Fall: $\delta \leq r$

Wir nehmen $S_f(T) < K$ an. Es existiert also ein S , so dass $S_f(T) < S < K$ gilt. Ein Widerspruch ergibt sich aus

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\leq 0} = \underbrace{rK - \delta S}_{> 0}.$$

Hinweis: Im Fall von *diskreten* Dividendenzahlungen gelten diese Aussagen so nicht mehr. Insbesondere ist S_f dann unstetig! Zum Beispiel ist bei einem amerikanischen Put ein vorzeitiges Ausüben in einem Zeitintervall vor dem Ausschüttungszeitpunkt sinnlos.

Die Black-Scholes-Gleichung gilt nicht mehr im ganzen Halbstreifen $0 \leq t \leq T$, $0 < S$, sondern sie gilt nur noch im Fortsetzungsbereich. Was gilt nun aber im Stoppbereich?

Bezeichnung

$$\mathcal{L}_{BS}(V) := \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV.$$

Damit lautet die Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) = 0.$$

Für $S < S_f$ gilt für den Put

$$V = K - S, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = -1, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) = \delta S - rK.$$

Aus den oberen Schranken ergibt sich:

im Fall $r < \delta$: $\delta S < rK$, also $\delta S - rK < 0$

im Fall $r \geq \delta$: $\delta S - rK < r(S - K) < 0$ weil $S < K$

also:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) < 0.$$

Für einen Call folgt das gleiche Ergebnis aus analogen Überlegungen.

Folgerung: Für alle $S > 0$, $0 \leq t \leq T$ gilt die partielle Differential-Ungleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS} \leq 0.$$

Übersicht

Put:	$V_P^{\text{am}} = K - S$ für $S \leq S_f$
	V_P^{am} löst die B-S-Gleichung für $S > S_f$
	Kontaktbedingung: $\frac{\partial V(S_f, t)}{\partial S} = -1$
Call:	$V_C^{\text{am}} = S - K$ für $S \geq S_f$
	V_C^{am} löst die B-S-Gleichung für $S < S_f$
	Kontaktbedingung: $\frac{\partial V(S_f, t)}{\partial S} = 1$

Bemerkung: Die zweite Ableitung nach S ist an S_f unstetig. D.h. V ist zwar glatt auf dem Fortsetzungsgebiet, nicht jedoch auf dem gesamten Halbstreifen.

4.6 Berechnung Amerikanischer Optionen

A. Formulierung mit Strafterm

Einheitliche Behandlung von $\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS} \leq 0$ auf dem ganzen Halbstreifen:

Für ein $p(V) \geq 0$ verlange

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) + p(V) = 0.$$

Der Strafterm (*penalty term*) p sollte 0 sein im Fortsetzungsbereich und positiv im Stoppbereich. Den Abstand zu S_f kennt man nicht, aber den Abstand $V - \Psi$ von V zum Payoff Ψ , und der wird als Steuergröße verwendet.

Eine Möglichkeit ist

$$p(V) := \frac{\epsilon}{V - \Psi} \quad \text{für ein kleines } \epsilon > 0.$$

Wirkung:

$V - \Psi \gg \epsilon$ impliziert $p \approx 0$, und i.W. resultiert die Black-Scholes-Gleichung.

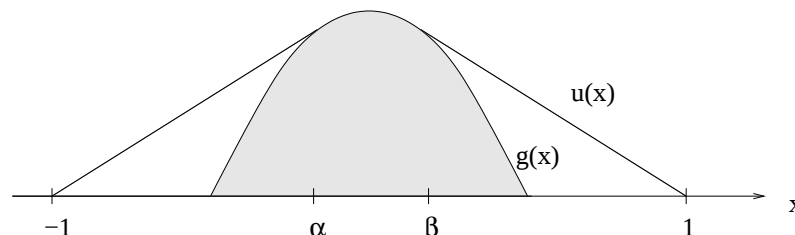
$V \rightarrow \Psi$ impliziert einen wachsenden Strafterm p . Ein großer Wert von p bedeutet, dass der BS-Anteil der Gleichung von p dominiert wird.

Bemerkung: p und die resultierende PDE sind nichtlinear in V . Im Folgenden suchen wir nach einer eleganteren Lösung, die auf die Black-Scholes-Situation zugeschnitten ist.

B. Einfaches Hindernisproblem (Exkurs)

Wir betrachten das “Hindernis” g mit den Eigenschaften

$$g > 0 \text{ für } \alpha < x < \beta \text{ mit } \alpha, \beta \text{ unbekannt, } g \in C^2, \quad g'' < 0, \quad g(-1) < 0 \text{ und } g(1) < 0.$$



Charakterisierung einer Funktion $u \in C^1[-1, 1]$ mit minimaler Länge mit $u(-1) = u(1) = 0$ und $u \geq g$:

$$\begin{aligned} -1 < x < \alpha: \quad u'' &= 0 & (\text{dann } u > g) \\ \alpha < x < \beta: \quad u &= g & (\text{dann } u'' = g'' < 0) \\ \beta < x < 1: \quad u'' &= 0 & (\text{dann } u > g) \end{aligned}$$

Darin drückt sich eine Komplementarität aus im Sinne von

$$\begin{aligned} \text{falls } u - g &> 0, \text{ dann } u'' &= 0, \\ \text{falls } u - g &= 0, \text{ dann } u'' &< 0. \end{aligned}$$

In der Sprache der Optionen heißt dies

$$\begin{aligned} \text{falls } V - \Psi &> 0, \text{ dann } \dot{V} + \mathcal{L}_{BS} &= 0, \\ \text{falls } V - \Psi &= 0, \text{ dann } \dot{V} + \mathcal{L}_{BS} &< 0. \end{aligned}$$

Die Aufgabe für das einfache Hindernisproblem lautet:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } u(x), \text{ so dass} \\ &u''(u - g) = 0, \quad -u'' \geq 0, \quad u - g \geq 0, \\ &u(-1) = u(1) = 0, \quad u \in \mathcal{C}^1[-1, 1]. \end{aligned} \quad (*)$$

α und β treten hier nicht explizit auf. Durch die numerische Lösung werden α und β im Nachhinein ablesbar sein. Das Problem (*) heißt **Komplementaritätsproblem**. Ein **lineares Komplementaritätsproblem** (LCP) hat die Form:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{A} \geq 0, \quad \mathcal{B} \geq 0, \quad \text{für geeignete } \mathcal{A}, \mathcal{B}.$$

Vorbereitend für eine **numerische Lösung** des einfachen Hindernisproblems verwende das Gitter

$$x_i = -1 + i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{2}{m}, \quad g_i := g(x_i).$$

Dies ergibt die diskrete Form des Hindernisproblems

$$\left. \begin{aligned} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})(w_i - g_i) &= 0, \\ -w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} &\geq 0, \\ w_i &\geq g_i \end{aligned} \right\} \quad \text{für } 0 < i < m$$

mit $w_0 = w_m = 0$. Passend dazu definieren wir

$$G := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{m-1} \end{pmatrix}, \quad g := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet das lineare Komplementaritätsproblem in Vektornotation

$$\left. \begin{aligned} (w - g)^T G w &= 0 \\ G w &\geq 0 \\ w &\geq g \end{aligned} \right\}$$

(Ende des Exkurses)

C. Komplementarität für das Black-Scholes-Problem

Speziell für den Put wird nun das transformierte Problem

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{solange} \quad V_P^{\text{am}} > (K - S)^+$$

als LCP formuliert. Dazu müssen wir auch die Nebenbedingungen transformieren.

$$\begin{aligned} V_P^{\text{am}}(S, t) &\geq (K - S)^+ \\ &= K \max\{1 - e^x, 0\} \end{aligned}$$

führt mit $q = \frac{2r}{\sigma^2}$ auf (hier speziell für $\delta = 0$):

$$\begin{aligned}
y(x, \tau) &\geq \exp\{\tfrac{1}{2}(q-1)x + \tfrac{1}{4}(q+1)^2\tau\} \max\{1 - e^x, 0\} \\
&= \exp\{\tfrac{1}{4}(q+1)^2\tau\} \max\{(1 - e^x)e^{\frac{1}{2}(q-1)x}, 0\} \\
&= \exp\{\tfrac{1}{4}(q+1)^2\tau\} \max\{e^{\frac{1}{2}(q-1)x} - e^{\frac{1}{2}(q+1)x}, 0\} \\
&=: g(x, \tau).
\end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass mit diesem g auch die Rand- und Anfangsbedingungen ausdrückbar sind:

$$\begin{aligned}
y(x, 0) &= g(x, 0) \\
y(x_{\min}, \tau) &= g(x_{\min}, \tau) \\
y(x_{\max}, \tau) &= g(x_{\max}, \tau)
\end{aligned}$$

Damit lautet das lineare Komplementaritätsproblem für den amerikanischen Put

$$\left. \begin{aligned}
\left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (y - g) &= 0 \\
\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &\geq 0 \\
y - g &\geq 0
\end{aligned} \right\}$$

mit Rand- und Anfangsbedingungen von oben.

Diese Formulierung ist identisch mit derjenigen des allgemeinen Falls, bis auf die Anpassung von g .

$$q = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad q_\delta = \frac{2(r - \delta)}{\sigma^2},$$

$$\text{Put: } (r > 0) \quad g(x, \tau) := \exp\{\tfrac{1}{4}((q_\delta - 1)^2 + 4q)\tau\} \max\{e^{\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x} - e^{\frac{1}{2}(q_\delta + 1)x}, 0\}$$

$$\text{Call: } (\delta > 0) \quad g(x, \tau) := \exp\{\tfrac{1}{4}((q_\delta - 1)^2 + 4q)\tau\} \max\{e^{\frac{1}{2}(q_\delta + 1)x} - e^{\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x}, 0\}$$

Bemerkung: Für einen amerikanischen Call ohne Dividendenzahlung und $r > 0$, $t < T$ gilt $V_C^{\text{Am}} = V_C^{\text{Eur}}$. Beweis für $\delta = 0$:

$$V_C^{\text{Am}} \geq V_C^{\text{Eur}} \geq S - Ke^{-r(T-t)} > S - K$$

D. Diskretisierung

Wir diskretisieren nun dieses Problem mit dem Gitter wie zu Beginn des Kapitels:

$$\begin{aligned}
\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i,\nu}}{\Delta\tau} &= \theta \frac{w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}}{\Delta x^2} + \\
&\quad (1 - \theta) \frac{w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu}}{\Delta x^2}
\end{aligned}$$

(“Theta-Methode”) mit $\theta = 0$ (explizites Verfahren), $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank-Nicolson) oder $\theta = 1$ (BTCS Verfahren). Mit der Abkürzung $\lambda := \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$ wird aus $\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0$ nun

$$\begin{aligned}
&w_{i,\nu+1} - \lambda\theta(w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}) \\
&\quad - w_{i,\nu} - \lambda(1 - \theta)(w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu}) \geq 0.
\end{aligned} \tag{*}$$

Wir definieren passend dazu

$$b_{i,\nu} := w_{i,\nu} + \lambda(1 - \theta)(w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu}), \text{ für } i = 2, \dots, m - 2.$$

Die Randbedingungen sind in $b_{1,\nu}$ und $b_{m-1,\nu}$ enthalten:

$$\begin{aligned} b_{1,\nu} &:= w_{1,\nu} + \lambda(1 - \theta)(w_{2,\nu} - 2w_{1,\nu} + g_{0,\nu}) - \lambda\theta g_{0,\nu+1} \\ b_{m-1,\nu} &:= w_{m-1,\nu} + \lambda(1 - \theta)(g_{m,\nu} - 2w_{m-1,\nu} + w_{m-2,\nu}) - \lambda\theta g_{m,\nu+1}, \end{aligned}$$

wobei

$$g_{i,\nu} := g(x_i, \tau_\nu) \quad (0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq \nu \leq \nu_{\max}).$$

Definiere nun

$$b^{(\nu)} := (b_{1,\nu}, \dots, b_{m-1,\nu})^{\mathsf{tr}}$$

und $w^{(\nu)}, g^{(\nu)}$ analog. Mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda\theta & -\lambda\theta & & 0 \\ -\lambda\theta & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\lambda\theta \\ 0 & & -\lambda\theta & 1 + 2\lambda\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$$

lautet das Problem (*) nun

$$Aw^{(\nu+1)} \geq b^{(\nu)} \quad \text{für alle } \nu.$$

Aus $y - g \geq 0$ wird

$$w^{(\nu)} \geq g^{(\nu)}$$

und schließlich wird aus $\left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(y - g) = 0$

$$\left(Aw^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right)^{\mathsf{tr}} \left(w^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)}\right) = 0.$$

Wir erhalten so den folgenden Makro-Algorithmus:

Algorithmus

Für $\nu = 0, 1, \dots, \nu_{\max} - 1$:

berechne $g := g^{(\nu+1)}$, $b := b^{(\nu)}$, s.o.

berechne w als Lösung von

$$Aw - b \geq 0, \quad w \geq g, \quad (Aw - b)^{\mathsf{tr}}(w - g) = 0. \quad (**)$$

setze $w^{(\nu+1)} := w$

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Umformulierung und Analyse des Zeitschicht-LCP (**).

Behauptung

Nach der Transformation $x := w - g$ und $y := Aw - b$ ist (**) äquivalent zu:

Finde Vektoren x, y , so dass für $\hat{b} := b - Ag$ Folgendes gilt:

$$Ax - y = \hat{b}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^{\mathsf{tr}}y = 0$$

(***)

Beachte, dass hier x, y allgemeine Vektoren $\in \mathbb{R}^{m-1}$ sind!

Beweis: Anwendung der Transformation.

Lemma

Die Aufgabe $(***)$ hat eine eindeutige Lösung.

Beweis:

1.) Definiere

$$G(x) := \frac{1}{2} x^T A x - \hat{b}^T x$$

mit A von oben, d.h.

$$A = I + \lambda \theta \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 2 aus Abschnitt 4.2D erhalten wir die Eigenwerte der Matrix A als

$$\mu_k^A = 1 + \lambda \theta 4 \sin^2(k\pi/2m) \geq 1.$$

Somit ist die symmetrische Matrix A positiv definit. Durch Ableiten von G nach x erhalte

$$G_x = Ax - \hat{b}, \quad G_{xx} = A$$

d.h. A ist die Hesse-Matrix von G . Da $G \in C^2$ ist, gilt:

G ist strikt konvex. $\iff$ Die Hesse-Matrix von G ist positiv definit.

Also ist die oben definierte quadratische Form G strikt konvex und hat somit auf jeder konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein eindeutiges Minimum. Man beachte, dass durch $x \geq 0$ eine konvexe Menge definiert ist.

2.) Verwende den Satz von Karush, Kuhn, Tucker (KKT):

Für das Minimum x^* einer konvexen Funktion G unter den Nebenbedingungen $H_i(x) \leq d_i$ für $i = 1, \dots, m$, wobei H_i konvex sind, gilt: Es gibt $y_i \geq 0$ so dass

$$\frac{\partial G(x^*)}{\partial x_j} + y_1 \frac{\partial H_1(x^*)}{\partial x_j} + \dots + y_m \frac{\partial H_m(x^*)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

mit $H_i(x^*) \leq d_i$ und $y_i(H_i(x^*) - d_i) = 0$ für $i = 1, \dots, m$.

(Literatur: z.B. [Stoer & Witzgall], [Strang], u.v.a.)

Anwendung: hier $m = 1$. Aus $x \geq 0$ folgt $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, m = 1$. D.h. $d_i = 0$ und $H_i(x) = -x_i$ und aus dem Satz von KKT folgt die Existenz von $y \geq 0$ mit

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial H_j}{\partial x_j} + 0 = \frac{\partial G}{\partial x_j} - y_j = 0$$

und $y_i x_i = 0$ für alle i . Speziell unter G gilt:

$$G_x = Ax - \hat{b} \implies Ax - \hat{b} - y = 0$$

D.h. $(***)$ hat eine eindeutige Lösung.

E. Numerische Zugänge

Man kann $(**)$ iterativ mit einem *Projektions-SOR-Verfahren* lösen, welches allerdings relativ langsam ist (nach [Cryer]).

Schneller kann man $(**)$ **direkt** lösen. Brennan & Schwartz schlagen zur Lösung von $(**)$ im Wesentlichen folgendes Prinzip vor:

Löse $Aw = b$ komponentenweise unter der NB $w \geq g$.

Dieses Prinzip alleine reicht noch nicht. Um das Prinzip umzusetzen, wird $Aw = b$ mit Hilfe der Gaußschen Elimination so zu einem äquivalenten System $\tilde{A}w = \tilde{b}$ umgeformt, dass $\tilde{A}$ eine Dreiecksmatrix (hier Bidiagonalmatrix) ist. Nach Berechnung von $\tilde{A}, \tilde{b}$ lässt sich obiges Prinzip mit einer Schleife lösen. Wenn $\tilde{A}$ ein oberes Dreieck ist, dann erfolgt die abschließende Schleife zur Lösung von $\tilde{A}w = \tilde{b}$ *rückwärts*, und wenn $\tilde{A}$ ein unteres Dreieck ist, dann erfolgt diese Schleife *vorwärts*. Es sei im i -ten Schritt $\tilde{w}_i$ die Lösung von $\tilde{A}w = \tilde{b}$. Dann scheint mit $w_i := \max\{\tilde{w}_i, g_i\}$ eine Realisierung gefunden zu sein.

Aber w hängt davon ab, wie die Schleife durchlaufen wird. Ein Algorithmus muss sicherstellen, dass die für die jeweilige Option charakteristische Ordnung erreicht wird. Für den **Put** heißt das:

Es sei i_f der Index des Knotens S_i , an dem V den Payoff berührt. Das heißt,

für $i \leq i_f$ gilt $w_i = g_i$ und

für $i_f < i \leq m$ gilt $w_i > g_i$.

Diese Struktur ist durch die Theorie festgelegt, jedoch ist i_f unbekannt. Insbesondere muss sich beim Put $w_1 = g_1$ ergeben.

Damit bei einem Put die Struktur garantiert erhalten wird (z.B. $w_1 = g_1$), muss diese Schleife vorwärts erfolgen. Deswegen ist für einen Put eine *RL*-Zerlegung von A notwendig (erzeugt untere Dreiecksmatrix $\tilde{A} = L$). Zu Beginn der Schleife werden die ersten Komponenten $w_i = g_i$ sein, bis zu dem ersten Index, an dem $w_i \geq g_i$ gilt. Dies ergibt den Index i_f .

Algorithmus (Put)

1. Phase: Berechne *RL*-Zerlegung von A : $\tilde{A} = L$ (Rückwärts-Schleife).
2. Phase: Vorwärts-Schleife; starte mit $i = 1$. Berechne die jeweils nächste Komponente von $\tilde{A}w = \tilde{b}$; sie sei $\tilde{w}_i$.
Setze $w_i := \max\{\tilde{w}_i, g_i\}$.

Der Aufwand ist gering (Lösung eines linearen Systems mit Tridiagonalmatrix). Es kann gezeigt werden, dass obiges Vorgehen für die Standard-Option mit der hier vorliegenden Matrix A funktioniert.

Für den **Call** verfährt man genau umgekehrt: In der ersten Phase wird durch die "traditionelle" *LR*-Zerlegung ein oberes Dreieck $\tilde{A} = R$ erzeugt, und anschließend die zweite Phase rückwärts durchlaufen.

Bemerkung (Genauigkeit)

Da $V(S, t)$ nicht zweimal stetig differenzierbar bzgl. S an $S_f(t)$ ist, hat dies Auswirkungen auf die Genauigkeit. Der Konvergenzbeweis von Crank-Nicolson fordert sogar $y \in C^4$.

Trotz der fehlenden Glätte ist der Crank-Nicolson-Ansatz hier von ausreichender Genauigkeit, Oszillationen werden relativ “schnell” gedämpft. Sogar Extrapolation funktioniert ziemlich gut, obwohl die (hinreichenden) Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

4.7 Eine einfache analytische Methode

Wir leiten im Folgenden eine analytische Methode für den Put mit $\delta = 0$ her, die **Interpolationsmethode von Johnson**.

Idee

Aufbauend auf Schranken

$$V^{\text{low}} \leq V_{\text{P}}^{\text{am}}(S, t; K) \leq V^{\text{up}},$$

setzen wir die Näherung $\bar{V}$ für V an als

$$\bar{V} := \alpha V^{\text{up}} + (1 - \alpha) V^{\text{low}}$$

mit geeignetem $\alpha \in [0, 1]$.

Als untere Schranke verwenden wir einen europäischen Put mit gleichem Strike.

$$V^{\text{low}} := V_{\text{P}}^{\text{eu}}(S, t; K).$$

Wegen der Randbedingung für europäische Put-Optionen in $S = 0$ mit beliebigem Strike $\tilde{K}$

$$\tilde{K} e^{-r(T-t)}$$

folgt

$$V_{\text{P}}^{\text{eu}}(0, t; K e^{r(T-t)}) = K = V_{\text{P}}^{\text{am}}(0, t; K).$$

So gilt für genügend kleines $S > 0$ (zumindest bis S_f) wegen $V_{\text{P}}^{\text{am}} = \text{payoff}$ und weil $V(S, \cdot)$ konvex ist

$$V_{\text{P}}^{\text{am}}(S, t; K) \leq V_{\text{P}}^{\text{eu}}(S, t; K e^{r(T-t)}).$$

Behauptung

Dies gilt sogar für alle $S > 0$. (ohne Beweis)

Resultat

Es gibt eine obere Schranke

$$V^{\text{up}} := V_{\text{P}}^{\text{eu}}(S, t; K e^{r\tau}) \quad \text{mit } \tau := T - t.$$

Nun wollen wir $\alpha = \alpha(K, r, \sigma, S, \tau)$ mit einer geschickten Modellierung und einer empirischen Regression genauer bestimmen. Johnson *berechnete* zuerst viele “Daten” mit anderen Algorithmen und stellte für $S \approx K$ fest

$$\alpha \approx \frac{1}{4} \quad \text{bzw. } \alpha \approx \frac{1}{a_0} \quad \text{mit } a_0 \approx 4.$$

Weil in den beiden Spezialfällen $r = 0$ und $\tau = 0$ jeweils $V^{\text{am}} = V^{\text{eu}}$, also

$$\bar{V} = V_{\text{P}}^{\text{eu}}(S, t; K) = V^{\text{low}}$$

wollen wir

$$\alpha = 0 \iff r \cdot \tau = 0$$

erreichen. Dazu modellieren wir vorläufig

$$\alpha = \frac{r\tau}{a_0 r\tau + a_1}.$$

Nun setzen wir für $S = K$ eine Regression mit “least squares”-Fit auf den berechneten Daten an und erhalten

$$a_0 = 3.9649 \quad \text{und} \quad a_1 = 0.032325.$$

Anschließend modifizieren wir diesen Grundbaustein von α wie folgt:

$$\alpha := \left(\frac{r\tau}{a_0 r\tau + a_1} \right)^\beta \quad \text{mit} \quad \beta := \frac{\ln(S/S_f)}{\ln(K/S_f)},$$

wobei für S_f eine geeignete Näherung $\bar{S}_f$ gesetzt wird. Wegen $S = K \Rightarrow \beta = 1$ ist dieses β konsistent zur bisherigen Version von α .

Es fehlt noch eine Approximation für S_f . Hierzu betrachten wir die zwei Spezialfälle

$$\begin{aligned} S_f &= K \quad \text{für } \tau = 0 \\ S_f &= K \frac{2r}{\sigma^2 + 2r} \quad \text{für } \tau \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und setzen für $\bar{S}_f$ wie folgt an:

$$\bar{S}_f := K \left(\frac{2r}{\sigma^2 + 2r} \right)^\gamma$$

für geeignetes γ . Damit die Spezialfälle berücksichtigt werden, setzen wir

$$\gamma := \frac{\sigma^2 \tau}{b_0 \sigma^2 \tau + b_1}$$

und überprüfen

$$\begin{aligned} \gamma &= 0 \iff \tau = 0 \\ \gamma &\approx 1 \quad \text{für } \tau \rightarrow \infty \text{ und } b_0 \approx 1. \end{aligned}$$

Diese Qualität ist im Ansatz für γ bereits enthalten. Die “least-squares”-Fit Methode erbringt hier

$$b_0 = 1.04083 \quad \text{und} \quad b_1 = 0.00963.$$

Algorithmus

Für geeignetes S, τ, K, r, σ werte $\gamma, \bar{S}_f, \beta = \beta(\bar{S}_f)$ und α aus.
 Werte die Black-Scholes-Formel für V^{low} und V^{up} aus.
 $\bar{V}$ ist Näherung für V_p^{am} für $S > \bar{S}_f$.

Vorteile: schnell, und mit fester Rechenzeit.

Nachteil: Genauigkeit gering