Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 1
9.4.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 15.4.2015 bis 12:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

1. Weisen Sie die folgenden Identitäten für Teilmengen A, B eines metrischen Raums X nach.

   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   c) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

   d) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

   Finden Sie für b) und d) jeweils ein Beispiel, bei dem die Gleichheit falsch ist.

2. Es sei Y die Teilmenge von $\mathbb{R}$, die aus 0 und $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ besteht, versehen mit der induzierten Metrik. Bestimmen Sie alle offenen und abgeschlossenen Mengen in dem metrischen Raum Y.

3. Es seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, falls $f(O) \subset Y$ offen ist für jede offene Teilmenge $O \subset X$. Analog heißt f abgeschlossen, falls $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$. Finden Sie ein Beispiel für eine Abbildung, die offen aber nicht abgeschlossen ist, und ein Beispiel für eine Abbildung, die abgeschlossen aber nicht offen ist. Sind die folgenden Abbildungen offen oder abgeschlossen?

   a) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x$.

   b) $q : \mathbb{R} \to S^1;\ x \mapsto (\cos x, \sin x)$ wobei S^1 den Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

4. Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine *disjunkte* Vereinigung einer Familie von offenen Intervallen (a, b) mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist.