Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 2
15.4.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 22.4.2015 bis 12:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Ein (*) kennzeichnet Zusatzaufgaben. Ihre Bearbeitung ist freiwillig und ermöglicht Bonuspunkte.

5. Es bezeiche $\mathcal{O}$ die Familie aller Intervalle $(a, +\infty) \subset \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, wobei wir $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$ und $(+\infty, +\infty) := \emptyset$ setzen. Zeigen Sie:
   a) $\mathcal{O}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.
   b) $\mathbb{R}$ versehen mit $\mathcal{O}$ ist zusammenhängend.
   c) Beschreiben Sie den Abschluss einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ bezüglich $\mathcal{O}$.
   d) Betrachten Sie die Identität i als Abbildung von $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie nach $\mathbb{R}$ mit der Topologie $\mathcal{O}$. Ist i oder i^{-1} stetig?

6. Es seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei das Bild $f(X) := \{f(x) \in Y |\ x \in X\}$ wie immer mit der Teilraum-Topologie versehen. Zeigen Sie:
   a) $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f : X \to f(X)$ stetig ist.
   b) Es sei X die Vereinigung einer Familie offener Teilmengen $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Ist die Einschränkung von f auf jeden Teilraum O_α stetig, so ist auch f stetig.

7. Es sei X ein topologischer Raum. Wir versehen $X \times X$ wie immer mit der Produkt-Topologie. Beweisen Sie:
   a) Die Diagonalenabbildung $\Delta : X \to X \times X;\ x \mapsto (x, x)$ ist stetig.
   b) $\Delta : X \to \Delta(X)$ ist eine Homöomorphismus.
   c) Die Diagonale $\Delta(X)$ ist abgeschlossen in $X \times X$ genau dann, wenn X ein Hausdroff-Raum ist.
   d) Sei Y ein weiterer topologischer Raum und seien $f, g : Y \to X$ zwei stetige Abbildungen. Ist X ein Hausdorff-Raum, so ist die Menge A der Punkte $y \in Y$ mit $f(y) = g(y)$ abgeschlossen in Y.
   Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe c).
   e) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass d) ohne die Hausdorff-Eigenschaft von X falsch sein kann.
   Hinweis: Betrachten Sie einen Raum X mit der Klumpen-Topologie.

8. Eine Teilmenge S eines topologischen Raums X heißt dicht in X, wenn $\bar{S} = X$ gilt. Beweisen Sie:

   a) Hat X eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n, ...\}$, so hat X eine abzählbare dichte Teilmenge.
   Hinweis: Wählen Sie Punkte aus den Teilmengen B_i.

   b) Ist X ein metrischer Raum und S eine abzählbare dichte Teilmenge, so hat X eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_r(x) |\ x \in S, r \in \mathbb{Q}\}$.

   c) Betrachte $\mathbb{R}$ mit der halboffenen Topologie (eine Basis besteht aus allen Intervallen $[a, b)$). Zeigen Sie, dass die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in diesem topologischen Raum sind.

   d) (*) Zeigen Sie, dass die halboffene Topologie von $\mathbb{R}$ keine abzählbare Basis besitzt. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ mit dieser Topologie nicht metrisierbar ist.