Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 3
22.4.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 29.4.2015 bis 12:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

9. a) Zeigen Sie, dass eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat.

   Hinweis: Verwenden Sie eine abzählbare dichte Teilmenge in $\mathbb{R}^n$.

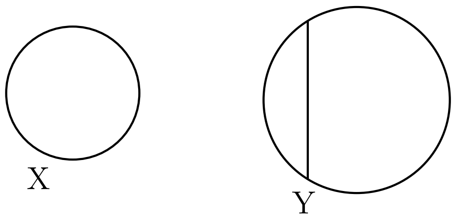
   b) Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass U und V genau dann homöomorph sind, wenn sie dieselbe Anzahl von Zusammenhangskomponenten haben.

   Hinweis: Aufgabe 4 und Aufgabe 6.

10. Sei X ein topologischer Raum mit $X = A \cup B$ für abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset X$. Seien $f : A \to Y$ und $g : B \to Y$ stetige Abbildungen in einen topologischen Raum Y, die auf $C = A \cap B$ übereinstimmen. Dann definiert $h(x) = f(x)$ für $x \in A$ bzw. $h(x') = g(x')$ für $x' \in B$ eine stetige Abbildung $h : X \to Y$. Was hat das mit Aneinanderhängung von Wegen zu tun?

11. Sei X ein Kreis und Y ein Kreis vereinigt mit einer seiner Sehnen. Zeigen Sie, dass X und Y nicht homöomorph sind.

    Hinweis: Entfernen Sie ein geeignetes Paar von Punkten.



12. a) Hat ein Hausdorff-Raum X eine Basis, deren Elemente alle gleichzeitig offen und abgeschlossen sind, so ist X total unzusammenhängend.

    b) Sei X die Gerade mit der halboffenen Topologie (siehe Aufgabe 8). Zeigen Sie, dass X total unzusammenhängend ist.

    Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe a).

    c) Sei $C \subset [0, 1]$ die übliche Cantor-Menge, die als Durchschnitt $C = \bigcap C_n$ einer absteigenden Folge $\ldots \subset C_n \subset C_{n-1} \ldots$ gegeben ist, wobei C_n aus 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen $I_{n,k}$ besteht. (Seite 26 im Skript.) Zeigen Sie, dass die Schnitte von C mit den Intervallen $I_{n,k}$ eine Basis von C bilden, die aus gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen von C besteht.