Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 4
29.4.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 6.5.2015 bis 14:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

13. Zeigen Sie, dass ein Raum X genau dann kompakt ist, wenn er die folgende Eigenschaft hat. Für jede Familie $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ abgeschlossener Teilmengen C_α gilt: Der Durchschnitt aller C_α ist genau dann nicht-leer, wenn der Durchschnitt jeder endlichen Teilfamilie der C_α nicht-leer ist.

14. Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

    a) X ist kompakt genau dann, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

    b) Ist X kompakt, so besitzt X eine abzählbare Basis.

    Hinweis: Überdecken Sie X durch Bälle mit Radius $1/n$ und finden Sie eine abzählbare dichte Teilmenge.

15. Seien (X_i, d_i) metrische Räume mit Durchmesser ≤ 1. Zeigen Sie, dass die Metrik d auf dem Produkt $X = X_1 \times X_2 \times \ldots$ gegeben durch $d((x_i),(y_i)) := \sqrt{\Sigma_i \frac{d_i(x_i,y_i)^2}{2^{2i}}}$ die Produkt-Topologie auf X definiert. (Sie brauchen nicht zu beweisen, dass d eine Metrik ist, aber können es sich natürlich gerne überlegen).

16. Es sei $L_n \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $L_n := \{\{(t, \frac{t}{n}) \in \mathbb{R}^2 |\ t \in [0,1]\}$ und L_∞ gegeben durch $L_\infty := \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 |\ t \in [0,1]\}$. Der Raum X sei definiert als Vereinigung aller L_n, inklusive L_∞. Also

$$X := \{(t, \frac{t}{n}s) \in \mathbb{R}^2 |\ t \in [0,1], n \in \mathbb{N}, s \in \{0,1\}\}.$$

Eine Teilmenge $O \subset X$ sei offen, wenn $O \cap L_n$ offen ist für alle $n \leq \infty$, wobei L_n die Teilraum-Topologie trägt. Zeigen Sie, dass so eine normale Topologie auf X definiert wird, die sich nicht metrisieren lässt.

Hinweis: Finden Sie für eine gegebene Metrik d auf X eine Folge (x_n) mit $x_n \in L_n$ so dass x_n gegen $(0,0)$ konvergiert bezüglich d, nicht jedoch bezüglich der oben definierten Topologie auf X.