Prof. Dr. A. Lytchak

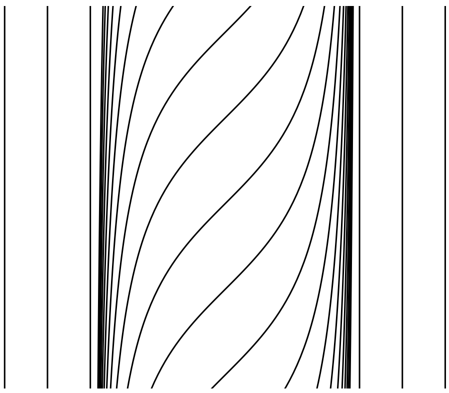
SS 2015
Blatt 5
7.5.2015

Topologie

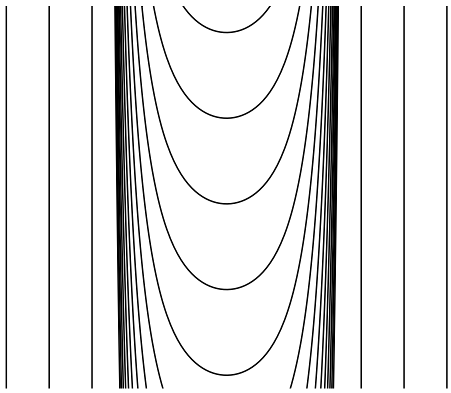
Abgabe: Mittwoch, 13.5.2015 bis 14:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Wie üblich seien alle Quotientenräume mit der Quotiententopologie versehen.

17. Betrachten Sie die beiden Äquivalenzrelationen $\sim_a$ und $\sim_b$ auf $\mathbb{R}^2$, wie unten angedeutet. Beschreiben Sie die Quotienten $\mathbb{R}^2/\sim_a$ und $\mathbb{R}^2/\sim_b$ und entscheiden Sie jeweils, ob diese Hausdorff sind.



$\sim_a$



$\sim_b$

18. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$D^n \to S^n;\ x \mapsto \left(\cos(\pi\,\|x\|), \sin(\pi\,\|x\|)\cdot\frac{x}{\|x\|}\right)$$

einen Homöomorphismus $D^n/S^{n-1} \to S^n$ induziert.

19. Eine surjektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Quotientenabbildung*, falls Teilmengen $V \subset Y$ genau dann offen sind, wenn ihre Urbilder $f^{-1}(V)$ offen sind.

    a) Zeigen Sie: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Quotientenabbildungen, so ist auch die Komposition $g \circ f$ eine Quotientenabbildung.

    b) Finden Sie Quotientenabbildungen $D^2 \to S^1$, $S^2 \to D^2$, $S^2 \to S^1$, $S^2 \to T^2$ und $T^2 \to S^2$. [Sie brauchen keine Formeln angeben, eine genaue geometrische Beschreibung mit Hilfe von Bildern genügt.]

20. Für $i = 1, 2$ bezeichne $V_i \cong D^2 \times S^1$ einen Volltorus. Wir fassen D^2 als abgeschlossene Einheitsscheibe in $\mathbb{R}^2$ auf, und $S^1 \subset D^2$ als Einheitskreis. Dies definiert Tori $T_i \subset V_i$ durch $T^2 \cong S^1 \times S^1 \subset D^2 \times S^1$. Für eine Verklebeabbildung $\varphi : T_1 \to T_2$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim_\varphi$ auf $V_1 \dot\cup V_2$ wie folgt.

$$x \sim_\varphi y \;\Leftrightarrow\; x = y \text{ oder } \varphi(x) = y$$

Finden Sie Abbildungen $\varphi : T_1 \to T_2$, so dass gilt:

a) $V_1 \dot\cup V_2 / \sim_\varphi \cong S^1 \times S^2$.

b) $V_1 \dot\cup V_2 / \sim_\varphi \cong S^3$.