Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 6
13.5.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 20.5.2015 bis 14:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

21. *Gerade mit doppeltem Urprung.* Es sei $X = Y = \mathbb{R}$. Seien A, B die (nicht abgeschlossenen!) Teilmengen von X bzw. Y, die aus dem Komplement der jeweiligen 0 bestehen. Es bezeichne $\phi : A \to B \subset Y$ den natürlichen Homöomorphismus. Der Raum Z sei definiert als die Anklebung von X an Y entlang der Abbildung ϕ.

    Beweisen Sie:

    a) Jeder Punkt in Z hat eine offene Umgebung, die homöomorph zu einem offenen Intervall ist.

    b) Der Raum Z ist nicht Hausdorffsch.

22. Stellen Sie den Torus T^2 und die reell projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ als einen 2-dimensionalen Zellkomplex dar, bei dem alle Anklebeabbildungen injektiv sind.

    Hinweis: Zerlegen Sie jeweils das Quadrat in 4 Teilquadrate.

23. Es sei $\phi : I \to I$ eine stetige Abbildung mit $\phi(0) = 0,\ \phi(1) = 1$. Sei $f : I \to X$ ein Weg in einem Raum X. Beweisen Sie, dass der Weg f und seine Reparametrisierung $f \circ \phi$ homotop sind.

24. Verklebt man n halb-offene Intervalle an ihren Randpunkten, so erhält man ein *Bouquet von Intervallen.*

    a) Was ist ein Bouquet von zwei Intervallen?

    b) Zeigen Sie: Zwei Bouquets von Intervallen sind genau dann homöomorph, wenn sie aus der gleichen Anzahl von Intervallen verklebt wurden.

    c) Zeigen Sie: Ist X ein Bouquet von Intervallen und $p \in X$ der Verklebepunkt, so ist jede zusammenhängende offene Umgebung von p homöomorph zu X.

    d) Es sei G ein 1-dimensionaler Zellkomplex mit nur endlich vielen Zellen, ein sogenannter *endlicher Graph*. Die 0-Zellen von G bezeichnet man als *Ecken*.

       Zeigen Sie: Ein Punkt von G ist entweder offen, oder hat eine Umgebung U die homöomorph zu einem Bouquet von k Intervallen ist. Darüberhinaus hängt die Zahl k nur von dem Punkt ab. Für eine Ecke heißt diese Zahl die *Valenz* der Ecke.