Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 7
20.5.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 27.5.2015 bis 14:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

25. Es sei X ein Raum und x_0, x_1 seien Punkte in X. Für einen Weg h von x_0 nach x_1 bezeichne β_h den natürlichen Isomorphismus $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$. Zeigen Sie:

    a) β_h hängt nur von der Homotopieklasse von h ab.

    b) Ist g ein weiterer Weg von x_0 nach x_1, so unterscheiden sich β_h und β_g nur durch einen inneren Automorphismus von $\pi_1(X, x_0)$. D.h. es existiert ein Element $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, so dass gilt $\beta_h = \alpha \cdot \beta_g \cdot \alpha^{-1}$.

26. Aus dem Isomorphismus $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ folgt, dass Schleifen in $X \times \{y_0\}$ und $\{x_0\} \times Y$ kommutierende Elemente in $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ repräsentieren. Zeigen Sie dies durch eine explizite Homotopie. D.h. konstruieren Sie für eine Schleife α in $X \times \{y_0\}$ und eine Schleife β in $\{x_0\} \times Y$ eine Homotopie die $\alpha \cdot \beta$ in $\beta \cdot \alpha$ überführt.

27. Es seien A_1, A_2 und A_3 kompakte Teilmengen in $\mathbb{R}^3$. Verwenden Sie den Satz von Borsuk-Ulam um zu zeigen, dass es eine affine Ebene $P \subset \mathbb{R}^3$ gibt, welche alle drei Teilmengen A_i in zwei Teile von gleichem Maß zerlegt.

    Hinweis: Zeichnen Sie für jede Richtung in $\mathbb{R}^3$, also für jedes Element in $v \in S^2$, eine affine Ebene in $\mathbb{R}^3$ aus, die senkrecht steht zu v und A_1 in zwei Teile mit gleichem Maß zerlegt.

28. Zeigen Sie jeweils, dass es keine Retraktionen von X auf $A \subset X$ gibt, also Abbildungen $r : X \to X$ mit $r(X) = A$ und $r|_A = \mathrm{id}_A$.

    a) $X = \mathbb{R}^3$ und A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ homöomorph zu S^1.

    b) $X = S^1 \times D^2$ und A sein Randtorus $S^1 \times S^1$.

    c) (*) X ein Möbiusband und A sein Randkreis.

    Hinweis: Sie dürfen den Isomorphismus $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ als bekannt voraussetzen.