Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 8
3.6.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 10.6.2015 bis 14:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

29. Es sei X homotopieäquivalent zu Y und Y homotopieäquivalent zu Z. Zeigen Sie, dass X homotopieäquivalent zu Z ist.

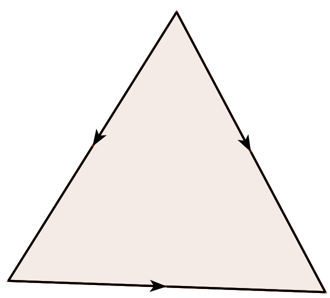
30. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe der Einpunktvereinigung $S^1 \vee S^2$ gleich $\mathbb{Z}$ ist. Verwenden Sie dazu Lemma 1.15 aus Hatcher und eine geeignete Retraktion.

31. Es seien $f_1, f_2 : S^{n-1} \to X$ zwei homotope Abbidungen von der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ in den Raum X. Zeigen Sie die Existenz einer Homotopieäquivalenz

$$X \cup_{f_1} D^n \simeq X \cup_{f_2} D^n.$$

Hinweis: Um eine Abbildung $F : X \cup_{f_1} D^n \to X \cup_{f_2} D^n$ zu erhalten, wählen Sie eine Homotopie $h : S^{n-1} \times [0,1] \to X$ von f_1 nach f_2. Setzen Sie nun $F(x) = x$ für $x \in X$, $F(x) = 2x$ für $x \in D^n_{1/2}$ dem abgeschlossenen Ball mit Radius $1/2$ in $\mathbb{R}^n$ und setzen Sie die Abbildung durch $F(x) = h(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|)$ fort.

32. Wir identifizieren jede Seite eines abgeschlossenen Dreiecks Δ in $\mathbb{R}^2$ gemäß der folgenden Skizze mit $[0,1]$ und verkleben je zwei Punkte auf dem Rand von Δ, wenn sie dem gleichen Punkt in $[0,1]$ entsprechen. Die *topologische Narrenkappe* ist der so erhaltene Quotientenraum. Man zeige mit Hilfe der Aussage aus Aufgabe 31, dass die topologische Narrenkappe zusammenziehbar ist.



Hinweis: Stellen Sie die topologische Narrenkappe in der Form $S^1 \cup_f D^2$ mit einem geeigneten $f : S^1 \to S^1$ dar.