Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 9
10.6.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 17.6.2015 bis 14:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

33. Es seien X und Y topologische Räume, wobei Y lokal wegzusammenhängend ist. Zeigen Sie: Ist $p : X \to Y$ eine Überlagerung, so ist liefert die Einschränkung von p auf eine Zusammenhangskomponente X_0 von X eine Überlagerung $p|_{X_0} : X_0 \to p(X_0)$.

34. Wir fassen $\pi_1(X, x_0)$ als Menge der basispunkterhaltenden Homotopieklassen von Abbildungen $(S^1, s_0) \to (X, x_0)$ auf. Es sei $[S^1, X]$ die Menge der *freien* Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \to X$, also Homotopieklassen ohne Bedingung an Basispunkte. Dann gibt es eine natürliche Abbildung $\Phi : \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$ welche die Basispunkte vergisst. Zeigen Sie, dass Φ für wegzusammenhängende Räume surjektiv ist, und dass $\Phi([f]) = \Phi([g])$ genau dann gilt, wenn $[f]$ und $[g]$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert sind.

    Hinweis: Proposition 1.6, Hatcher.

35. Es sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    a) Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
    b) Jede Abbildung $S^1 \to X$ setzt sich fort zu einer Abbildung $D^2 \to X$.
    c) $\pi_1(X, x_0) = 0$ für jeden Punkt $x_0 \in X$.

    Folgern Sie, dass ein Raum X genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn alle Abbildungen $S^1 \to X$ frei homotop sind.

36. Es sei $X \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung der Einheitssphäre mit einem Durchmesser. Konstruieren Sie eine Überlagerung $\tilde{X} \to X$ mit einfachzusammenhängendem $\tilde{X}$.

    Hinweis: Legen Sie den Durchmesser nach außen und orientieren Sie sich an dem Beispiel für $S^1 \vee S^2$ aus der Vorlesung.