Prof. Dr. A. Lytchak

SS 2015
Blatt 10
17.6.2015

Topologie

Abgabe: Mittwoch, 24.6.2015 bis 14:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

37. (*Hawaiianische Ohrringe*)

    Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ der Teilraum bestehend aus allen Kreisen C_n mit Radius $\frac{1}{n}$ und Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0)$ für $n = 1, 2, \ldots$.

    a) Zeigen Sie: Für jeden Kreis C_n existiert eine Retraktion $r_n : X \to C_n$. Also repräsentiert jedes C_n ein nichttriviales Element in $\pi_1(X)$.

    b) Nutzen Sie die Idee aus Teilaufgabe a), um zu zeigen, dass X keine universelle Überlagerung besitzt.

38. Es sei $G \curvearrowright X$ eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einem Raum X. Die Operation heißt *frei*, wenn für jedes $x \in X$ gilt: $gx = x \Leftrightarrow g = e$ (das neutrale Element). Die Operation heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn es für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt, so dass die Menge $\{g \in G | \; gU \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist.

    Sei nun $\Gamma \curvearrowright X$ eine Gruppenoperation die frei und eigentlich diskontinuierlich ist. Es sei Γ_1 eine Untergruppe von Γ. Zeigen Sie:

    a) Die induzierte Operation von Γ_1 auf X ist auch frei und eigentlich diskontinuierlich.

    b) Die natürliche Abbildung $X/\Gamma_1 \to X/\Gamma$ ist eine Überlagerung.

    c) Ist Γ_1 ein Normalteiler in Γ, so induziert jedes $\gamma \in \Gamma$ eine Decktransformation von $X/\Gamma_1 \to X/\Gamma$. Es gilt $\Gamma/\Gamma_1 \cong G(X/\Gamma_1)$. Wo haben Sie benutzt dass Γ_1 ein Normalteiler ist?

39. Zeigen Sie: Operiert eine Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf einem Hausdorffraum X, so ist diese Wirkung auch frei und eigentlich diskontinuierlich im Sinne der Vorlesung, also eine Überlagerungswirkung in der Terminologie von Hatcher. Insbesondere ist jede freie Wirkung einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorffraum eine Überlagerungswirkung.

40. Es seien X und Y zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Räume mit universellen Überlagerungen $\tilde{X} \to X$ und $\tilde{Y} \to Y$. Zeigen Sie: Sind X und Y homotopieäquivalent, so auch $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$.