

## Topologie

**Abgabe:** Dieses Blatt wird nicht abgegeben! Die Bearbeitung ist freiwillig.

45. Wiederholen Sie alle klausurrelevanten Übungsaufgaben (siehe Klausurstoff) und wenden Sie sich bei Unklarheiten an ihre Tutoren und ihren Dozenten.
46. a) Beschreiben Sie einen Zellenkomplex  $X$  mit einer 0-Zelle, einer 1-Zelle und einer 2-Zelle, so dass  $\pi_1(X)$  aus drei Elementen besteht.  
b) Berechnen Sie  $\pi_1(\mathbb{RP}^3)$  mit Hilfe der Zellenzerlegung von Beispiel 0.4 in Hatcher.

47. (Eulercharakteristik endlicher Graphen)

Es sei  $G$  ein zusammenhängender endlicher Graph. Die Eulercharakteristik von  $G$  sei definiert durch

$$\chi(G) = E - K$$

wobei  $E$  die Anzahl der Ecken von  $G$  bezeichnet und  $K$  die Anzahl der Kanten. Es seien  $G, G'$  zusammenhängende endliche Graphen.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion: Sind  $G$  und  $G'$  homotopieäquivalent, so gilt  $\chi(G) = \chi(G')$ .  
*Hinweis:* Reduzieren Sie die Anzahl der Kanten und Ecken indem Sie Kanten zusammenziehen.
- b) Gilt  $\chi(G) = 1 - k$ , so ist  $\pi_1(G) = F_k$  eine freie Gruppe in  $k$  Erzeugern.
- c) Ist  $G' \rightarrow G$  eine Überlagerung mit  $m$  Blättern, so gilt  $\chi(G') = m \cdot \chi(G)$ . Folgern Sie, dass eine Untergruppe  $\Gamma$  in  $F_k$  mit  $|F_k/\Gamma| = m$  frei erzeugt wird von  $mk - m + 1$  Elementen.
48. Es bezeichne  $\Sigma_g$  eine geschlossene Fläche vom Geschlecht  $g$ .
- a) Konstruieren Sie eine zweifache Überlagerung  $\Sigma_{2g-1} \rightarrow \Sigma_g$ .  
*Hinweis:* Beispiel 1.41 in Hatcher.
- b) Zeigen Sie, dass  $\pi_1(\Sigma_g)$  eine Untergruppe  $\Gamma$  mit  $|\pi_1(\Sigma_g)/\Gamma| = 2$  besitzt, die von  $4g - 2$  Elementen erzeugt wird. Folgern Sie, dass  $\pi_1(\Sigma_g)$  keine freie Gruppe ist.