1. Existenz von Funktionen

Sei X ein normaler topologischer Raum. Ist $A \subset U$ mit U offen und A abgeschlossen, so gibt es ein offenes O mit $A \subset O \subset \bar{O} \subset U$, d.h., man kann zwischen A und U noch ein solches Paar hineinschieben. Dies folgt aus der Definition der Normalität, angewendet auf abgeschlossene Mengen A und $X \setminus U$.

Nun können wir das "Lemma von Urysohn" zeigen:

SATZ 1.1. *Sind in einem normalen Raum X ein Paar disjunkter abgeschlossener Mengen A, B gegeben, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(A) = 0$ und $f(B) = 1$.*

Beweis. Setze $U_1 = X \setminus B$ und finde offenes U_0 mit $A \subset U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U_1$. Nun schieben wir eine offene Menge $U_{\frac{1}{2}}$ zwischen $\bar{U}_0$ und U_1. Dann eine offene Menge $U_{\frac{1}{4}}$ zwichen $\bar{U}_0$ und $U_{\frac{1}{2}}$, sowie eine offene Menge $U_{\frac{3}{4}}$ zwischen $\bar{U}_{\frac{1}{2}}$ und U_1.

Induktiv (nach n), finden wir für jede dyadische Zahl $d = \frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n$ offene Mengen U_d, so dass für $r < s$ die Inklusion $\bar{U}_r \subset U_s$ gilt. Bezeichne mit D die Menge aller dyadischen Zahlen in $[0,1]$.

Wir definieren nun $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 1$ für $x \notin U_0$. Für $x \in U_1$ setzen wir $f(x) = \inf\{d \in D | x \in U_d\}$.

Es gilt $f(A) = 0$ und $f(B) = 1$. Ferner besteht für $t \in (0,1)$ das Urbild des Strahls $(-\infty, t)$ in X aus allen Punkten x die in einem U_d mit $d < t$ enthalten sind. Damit ist dieses Urbild eine Vereinigung offener Mengen und damit offen.

Genauso besteht das Urbild des Strahls (t, ∞) aus allen Punkten x, die in einem U_s mit $s > t$ nicht enthalten sind. Füer jede dyadische Zahl $d \in [t, s]$ ist dann x nicht in $\bar{U}_d$ enthalten. Deswegen ist das Urbild die Vereinigung aller Komplemente $X \setminus \bar{U}_d$, wobei d über alle dyadischen Zahlen in $(t, 1]$ läuft. Damit ist auch diese Menge offen.

Deswegen sind Urbilder offener Intervalle in $\mathbb{R}$ offen in X. Also ist f stetig. $\square$

2. Satz

Jetzt können wir den Metrisierungssatz von Urysohn beweisen. Selbst für metrische Räume enthält der Satz eine neue Aussage: jeder metrischer Raum mit einer separablen dichten Teilmenge ist homömorph zu einer Teilmenge des Hilbertwürfels.

SATZ 2.1. *Ist X ein normaler topologischer Raum mit einer seprablen Basis $\mathcal{B}$, so ist X homöomorph zu einer Teilmenge des Hilbertwürfels W.*

Beweis. Sei $M = \Pi_{U,V\in\mathcal{B};\bar{U}\subset V} I_{U,V}$. Dabei ist für jedes Paar U, V, der Raum $I_{U,V}$ das Einheitsintervall $[0,1]$. Der Raum M ist also homöomorph zum Hilbert-Würfel.

Für jedes Paar U, V mit $\bar{U} \subset V$ wähle eine stetige Funktion $f_{U,V} : X \to \mathbb{R}$ mit $f_{U,V}(\bar{U}) = 0$ und $f_{U,V}(X \setminus V) = 1$. Sei $F : X \to M$ die Abbildung $F(x) = (f_{U,V}(x))_{U,V}$. Da jede Koordinatenabbildung $f_{U,V}$ von F stetig ist, ist $F : X \to M$ stetig.

Ist $A \subset X$ abgeschlossen und $x \notin A$, so gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V$, so dass V disjunkt von A ist. Da $\{x\}$ abgeschlossen ist, kann man zwischen x und V noch eine offene Menge mitsamt ihrem Abschluss einschieben. Damit findet man ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U \subset \bar{U} \subset V$.

Es gilt $f_{U,V}(x) = 0$ und $f_{U,V}(A) = 1$. Also liegt $F(x)$ nicht im Abschluss von $F(A)$. Damit ist $F(A)$ abgeschlossen in $F(X)$. Der obige Schluss, angewendet auf eine einpunktige Menge A zeigt, dass F injektiv ist.

Damit ist $F : X \to F(X)$ eine bijektive, stetige und abgeschlossenen Abbbildung, also ein Homöomorphismus. □